Lyc. o. 62,1

Hochschulbibliothek
Abt.: Mall Nr.: A 9
Bamberg

Vollständige

Anleitung

Bibl: zur Bankh:

Algebra

Aufsetzen von Fr: Isidori Zuske

von

Hrn. Leonhard Euler.

17

Erster Theil.

Von den verschiedenen Rechnungs-Arten, Verhältnißen und Proportionen.

Isidorus sibi comparavit.

1772.

BIBLIOTECA CENTRALA ACADEMIA

St. Petersburg.

gedruckt bey der Kayſ. Acad. der Wiſſenſchaften 1770.

STAATSBIBLIOTHEK
BAMBERG

Vorbericht.

Man überliefert hiermit denen Liebhabern der höhern Rechenkunst ein Werck, davon schon vor zwey Jahren eine russische Uebersetzung zum Vorschein gekommen ist.

Die Absicht des weltberühmten Verfassers bey demselben war, ein Lehrbuch zu verfertigen, aus welchem ein jeder ohne einige Beyhülffe die Algebra leicht fassen und gründlich erlernen könne.

Der Verlust seines Gesichts erweckte in ihm diesen Gedancken, und durch seinen stets geschäfftigen Geist angetrieben, säumete er nicht seinen Vorsatz ins Werck zu setzen. Zu diesem Ende erwählte er sich einen jungen Menschen, den er mit sich aus Berlin zur Aufwartung genommen hatte, und der ziemlich fertig rechnen, sonsten aber nicht den geringsten Begriff von der Mathematik hatte: er war seines Handwercks ein Schneider, und gehörte was seine Fähigkeit anlangt, unter die mittelmäßigen Köpfe. Dem ohngeachtet hat er nicht nur alles wohl begriffen, was ihm sein großer Lehrer vorsagte, und zu schreiben befahl, sondern er wurde dadurch in kurtzer Zeit in den Stand gesetzt

die

die in der Folge vorkommende schwere Buchstaben-Rechnungen ganz allein auszuführen und alle ihm vorgelegte Algebraische Aufgaben mit vieler Fertigkeit aufzulösen.

Dieses preiset um so viel mehr den Vortrag und die Lehr-Art des gegenwärtigen Wercks an; da der Lehrling der es geschrieben, begriffen und ausgeführet, sonsten nicht die geringste Hülffe von irgend einem andern als seinem zwar berühmten, aber des Gesichts beraubten Lehrers, genossen.

Ausser diesem für sich schon grossen Vorzug werden die Kenner besonders die Lehre von den Logarithmen und ihre Verbindung mit den übrigen Rechnungs-

Arten, so wie auch die für die Auflö-
sung der cubischen und biquadratischen
Gleichungen gegebenen Methoden mit
Vergnügen lesen und bewundern. Die
Liebhaber der Diophanteischen Aufgaben
aber werden sich über den letzten Ab-
schnitt des zweyten Theils freuen, in
welchem diese Aufgaben in einem ange-
nehmen Zusammenhange vorgetragen, und
alle zu ihrer Auflösung erforderliche
Kunstgriffe erklärt worden sind.

Inhalt
des ganzen Werks.

Erster Theil.

Erster Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungs-Arten mit einfachen Größen.

Cap. 1. Von den mathematischen Wissenschaften überhaupt. S. 4.

Cap. 2. Erklärung der Zeichen + plus und — minus. S. 7.

Cap. 3. Von der Multiplication mit einfachen Größen. S. 15.

Cap. 4. Von der Natur der gantzen Zahlen in Absicht auf ihre Factoren. S. 21.

Cap. 5. Von der Division mit einfachen Größen. S. 26.

Inhalt

Cap. 6. Von den Eigenschaften der gantzen Zahlen in Ansehung ihrer Theiler. S. 33.

Cap. 7. Von den Brüchen überhaupt. S. 40.

Cap. 8. Von den Eigenschafften der Brüche. S. 49.

Cap. 9. Von der Addition und Subtraction der Brüche. S. 55.

Cap. 10. Von der Multiplication und Division der Brüche. S. 59.

Cap. 11. Von den Quadrat-Zahlen. S. 67.

Cap. 12. Von den Quadrat-Wurzeln und den daher entspringenden Irrational-Zahlen. S. 73.

Cap. 13. Von den aus eben dieser Quelle entspringenden ohnmöglichen oder imaginären Zahlen. S. 83.

Cap. 14. Von den Cubic-Zahlen. S. 90.

Cap. 15. Von den Cubic-Wurzeln, und den daher entspringenden Irrational-Zahlen. S. 94.

Cap. 16. Von den Potestäten, oder Potenzen, überhaupt. S. 99.

Cap. 17. Von den Rechnungs-Arten mit den Potestäten. S. 107.

Cap.

Cap. 18. Von den Wurzeln in Absicht auf alle Potestäten. S. 112.
Cap. 19. Von der Vorstellung der Irrational-Zahlen durch gebrochene Exponenten. S. 116.
Cap. 20. Von den verschiedenen Rechnungs-Arten und ihrer Verbindung überhaupt. S. 122.
Cap. 21. Von den Logarithmen überhaupt. S. 130.
Cap. 22. Von den üblichen logarithmischen Tabellen. S. 137.
Cap. 23. Von der Art die Logarithmen vorzustellen. S. 143.

Zweyter Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungs-Arten mit zusammengesetzten Größen.

Cap. 1. Von der Addition mit zusammengesetzten Größen. S. 155.
Cap. 2. Von der Subtraction mit zusammengesetzten Größen. S. 160.
Cap. 3. Von der Multiplication mit zusammengesetzten Größen. S. 164.
Cap. 4. Von der Division mit zusammengesetzten Größen. S. 173.

Inhalt

Cap. 5. Von der Auflösung der Brüche in unendlichen Reyhen. S. 180.

Cap. 6. Von den Quadraten der zusammengesetzten Größen. S. 192.

Cap. 7. Von der Ausziehung der Quadrat-Wurzel in zusammengesetzten Größen. S. 197.

Cap. 8. Von der Rechnung mit Irrational-Zahlen. S. 204.

Cap. 9. Von den Cubis und von der Ausziehung der Cubic-Wurzel. S. 210.

Cap. 10. Von den höhern Potestäten zusammengesetzter Größen. S. 215.

Cap. 11. Von der Versetzung der Buchstaben, als worauf der Beweiß der vorigen Regul, wie eine jegliche Potestät von einer zusammengesetzten Größe leicht gefunden werden soll, beruhet. S. 225.

Cap. 12. Von der Entwickelung der irrationalen Potestäten durch unendliche Reyhen. S. 232.

Cap. 13. Von der Entwickelung der negativen Potestäten durch unendliche Reyhen. S. 238.

Dritter

des ganzen Werks.

Dritter Abschnitt.

Von den Verhältnißen, und Proportionen.

Cap. 1. Von der arithmetischen Verhältniß, oder dem Unterschied zwischen zweyen Zahlen. S. 245.

Cap. 2. Von den arithmetischen Proportionen. S. 250.

Cap. 3. Von den arithmetischen Progressionen. S. 256.

Cap. 4. Von der Summation der arithmetischen Progressionen. S. 263.

Cap. 5. Von den figurirten oder vieleckigten Zahlen. S. 271.

Cap. 6. Von dem geometrischen Verhältniß. S. 281.

Cap. 7. Von dem größten gemeinen Theiler zweyer gegebenen Zahlen. S. 287.

Cap. 8. Von den geometrischen Proportionen. S. 294.

Cap. 9. Anmerckungen über die Proportionen und ihren Nutzen. S. 301

Cap.

Inhalt

Cap. 10. Von den zusammengesetzten Verhältnißen. S. 309.
Cap. 11. Von den geometrischen Progressionen. S. 320.
Cap. 12. Von den unendlichen Decimal-Brüchen. S. 332.
Cap. 13. Von den Interessen-Rechnungen. S. 341.

Zweyter Theil.

Erster Abschnitt.

Von den algebraischen Gleichungen und derselben Auflösung.

Cap. 1. Von der Auflösung der Aufgaben überhaupt. S. 3.
Cap. 2. Von den Gleichungen des ersten Grades und ihrer Auflösung. S. 10.
Cap. 3. Auflösung einiger hieher gehörigen Fragen. S. 18.
Cap. 4. Von Auflösung zweyer und mehr Gleichungen vom ersten Grad. S. 37.

Cap.

des ganzen Werks.

Cap. 5. Von der Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen. S. 56.

Cap. 6. Von der Auflösung der vermischten quadratischen Gleichungen. S. 69.

Cap. 7. Von der Ausziehung der Wurzeln aus den vieleckichten Zahlen. S. 86.

Cap. 8. Von der Ausziehung der Quadrat-Wurzeln aus Binomien. S. 94.

Cap. 9. Von der Natur der quadratischen Gleichungen. S. 110.

Cap. 10. Von der Auflösung der reinen cubischen Gleichungen. S. 122.

Cap. 11. Von der Auflösung der vollständigen cubischen Gleichungen. S. 131.

Cap. 12. Von der Regel des Cardani oder des Scipionis Ferrei. S. 150.

Cap. 13. Von der Auflösung der Gleichungen des vierten Grades, welche auch biquadratische Gleichungen genennt werden. S. 163.

Cap. 14. Von des Bombelli Regel die Auflösung der biquadratischen Gleichungen auf cubische zu bringen. S. 175.

Cap.

Inhalt

Cap. 15. Von einer neuen Auflösung der biquadratischen Gleichungen. S. 183.

Cap. 16. Von der Auflösung der Gleichungen durch die Näherung. S. 194.

Zweyter Abschnitt.

Von der unbestimmten Analytic.

Cap. 1. Von der Auflösung der einfachen Gleichungen, worinnen mehr als eine unbekannte Zahl vorkommt. S. 213.

Cap. 2. Von der so genannten Regula-Cöci, wo aus zwey Gleichungen drey oder mehr unbekannte Zahlen bestimmt werden sollen. S. 238.

Cap. 3. Von den zusammengesetzten unbestimmten Gleichungen, wovon der einen unbekannten Zahl nur die erste Potestät vorkommt. S. 248.

Cap. 4. Von der Art diese irrationale Formeln $\sqrt{(a+bx+cxx)}$ rational zu machen. S. 256.

Cap.

Cap. 5. Von den Fällen, da die Formel $a+bx+cxx$ niemahls ein Quadrat werden kann. S. 279.

Cap. 6. Von den Fällen in gantzen Zahlen, da die Formel $axx+b$ ein Quadrat wird. S. 295.

Cap. 7. Von einer besondern Methode die Formel $ann+1$ zu einem Quadrat in gantzen Zahlen zu machen. S. 313.

Cap. 8. Von der Art diese Irrational-Formel $\sqrt{(a+bx+cxx+dx^3)}$ rational zu machen. S. 330.

Cap. 9. Von der Art diese Irrational-Formel $\sqrt{(a+bx+cxx+dx^3+ex^4)}$ rational zu machen. S. 345.

Cap. 10. Von der Art diese Irrational-Formel $\sqrt[3]{(a+bx+cxx+dx^3)}$ rational zu machen. S. 364.

Cap. 11. Von der Auflösung dieser Formel $axx+bxy+cyy$ in Factoren. S. 379.

Cap. 12. Von der Verwandelung dieser Formel $axx+cyy$ in Quadraten, oder auch höheren Potestäten. S. 399.

Cap.

Inhalt des ganzen Werks.

Cap. 13. Von einigen Formeln dieser Art, $ax^4 + by^4$, welche sich nicht zu einem Quadrat machen lassen. S. 418.

Cap. 14. Auflösung einiger Fragen, die zu diesem Theil der Analytic gehören. S. 438.

Cap. 15. Auflösung solcher Fragen, worzu Cubi erfordert werden. S. 506.

Ende.

Des

Ersten Theils

Erster Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungs-Arten mit einfachen Größen.

Capitel I.

Von den Mathematischen Wißenschaften überhaupt.

I.

Erstlich wird alles dasjenige eine Größe genennt, welches einer Vermehrung oder einer Verminderung fähig ist, oder wozu sich noch etwas hinzusetzen oder davon wegnehmen läßt.

Diesemnach ist eine Summa Gelds eine Größe, weil sich dazu setzen und hinweg nehmen läßt.

Imgleichen ist auch ein Gewicht eine Größe und dergleichen mehr.

2.

Es giebt also sehr viel verschiedene Arten von Größen, welche sich nicht wohl herzehlen laßen; und daher entstehen die verschiedene Theile der Mathematic, deren eine jegliche mit einer besondern Art von Größen beschäftiget ist, indem die Mathematic überhaupt nichts anders ist als eine Wißenschaft der Größen, und welche Mittel ausfündig macht, wie man dieselben ausmeßen soll.

3.

Es läßt sich aber eine Größe nicht anders bestimmen oder ausmeßen, als daß man eine Größe von eben derselben Art als bekannt annimt, und das Verhältniß anzeiget, worinnen eine jegliche Größe, von eben der Art, gegen derselben steht.

Also wann die Größe einer Summa Gelds bestimmt werden soll, so wird ein gewißes Stück Geld als z. E. ein Gulden, ein Rubel, ein Thaler, oder ein Ducaten und dergleichen für bekannt angenommen, und angezeigt wie viel dergleichen Stücke in gemeldeter Summa Gelds enthalten sind.

Eben so wann die Größe eines Gewichts bestimt werden soll, so wird ein gewißes Gewicht als z. E. ein

Pfund

Pfund, ein Centner, oder ein Loth und dergleichen für bekannt angenommen, und angezeigt wie viel derselben in dem vorigen Gewicht enthalten sind.

Soll aber eine Länge oder eine Weite ausgemeßen werden, so pfleget man sich darzu einer gewißen bekannten Länge, welche ein Fuß genennet wird, zu bedienen.

4.

Bey Bestimmungen, oder Ausmeßungen der Größen von allen Arten, kommt es also darauf an, daß erstlich eine gewiße bekannte Größe von gleicher Art fest gesetzet werde (welche das Maaß, oder die Einheit, genennet wird) und also von unserer Willkühr lediglich abhängt; hernach daß man bestimme in was für einem Verhältniß die vorgegebene Größe gegen dieses Maaß stehe, welches jederzeit durch Zahlen angezeigt wird, so daß eine Zahl nichts anders ist als das Verhältniß, worinnen eine Größe gegen eine andere, welche für die Einheit angenommen wird, steht.

5.

Hieraus ist klar, daß sich alle Größen, durch Zahlen ausdrücken laßen, und also der Grund aller Mathematischen Wißenschaften darin gesetzt werden

muß, daß man die Lehre von den Zahlen, und alle Rechnungs-Arten, so dabey vorkommen können, genau in Erwegung ziehe, und vollständig abhandele.

Dieser Grundtheil der Mathematic wird, die Analytic oder Algebra genennet.

6.

In der Analytic werden also blos allein Zahlen betrachtet, wodurch die Größen angezeiget werden, ohne sich um die besondere Art der Größen zu bekümmern, als welches in den übrigen Theilen der Mathematic geschiehet.

7.

Von den Zahlen insbesondere handelt die Arithmetic oder Rechenkunst, allein dieselbe erstreckt sich nur auf gewiße Rechnungs-Arten, welche im gemeinen Leben öffters vorkommen; hingegen begreift die Analytic auf eine allgemeine Art alles dasjenige in sich, was bey den Zahlen und derselben Berechnung auch immer vorfallen mag.

Cäptitel

Capitel 2.

Erklärung derer Zeichen + plus und — minus

8.

Wann zu einer Zahl eine andere hinzugesetzt oder addirt werden soll, so wird solches durch das Zeichen + angedeutet, welches der Zahl vorgesetzt und plus ausgesprochen wird.

Also wird durch 5 + 3 angedeutet, daß zu der Zahl 5 noch 3 addirt werden sollen, da man dann weis, daß 8 heraus komme: eben so z. E. 12 + 7 ist 19; 25 + 16 ist 41 und 25 + 41, ist 66 etc.

9.

Durch dieses Zeichen + plus pflegen auch mehrere Zahlen verbunden zu werden, als z. E.

7 + 5 + 9 wodurch angezeigt wird, daß zu der Zahl 7 noch 5, und über dieses noch 9 addirt werden sollen, welches 21 ausmacht. Hieraus versteht man was nachstehende Formel bedeutet, als:

8 + 5 + 13 + 11 + 1 + 3 + 10,

nemlich die Summa aller dieser Zahlen, welche beträgt 51.

10.

Wie dieses für sich klar ist, so ist noch zu mercken, daß auf eine allgemeine Art die Zahlen durch Buchstaben als a, b, c, d, etc. angedeutet werden, wann man also schreibt a + b, so bedeutet dieses die Summe der beyden Zahlen, welche durch a und b ausgedruckt werden, dieselben mögen nun so groß oder klein seyn als sie wollen. Eben so bedeutet f + m + b + x die Summe der Zahlen, welche durch diese Buchstaben ausgedruckt werden.

In einem jeglichen Fall also, wann man nur weis, was für Zahlen durch solche Buchstaben angedeutet werden, findet man durch die Rechenkunst die Summe oder den Werth dergleichen Formeln.

11.

Wann hingegen von einer Zahl eine andere weggenommen werden soll, oder subtrahirt wird, so wird solches durch das Zeichen — minus angedeutet, welches so viel als weniger ist, und derselben Zahl welche weggenommen wird, vorgesetzt wird:

Also bedeutet 8 — 5

daß von der Zahl 8 die Zahl 5 soll weggenommen werden, da dann wie bekannt ist 3 übrig

bleibt

bleibt. Eben so ist 12 — 7 so viel als 5, und 20 — 14 so viel als 6, etc.

12.

Es kann auch geschehen, daß von einer Zahl mehr Zahlen sollen zugleich subtrahiret werden.

als z. E: 50 — 1 — 3 — 5 — 7 — 9.

Welches also zu verstehen ist: nimmt man zuerst 1 von 50 weg, bleiben 49; davon 3 weggenommen, bleiben 46; davon 5, bleiben 41; davon 7 weg, bleiben 34; davon die letzten 9 weggenommen, bleiben 25; welches der Werth der vorgegebenen Formel ist. Aber da die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, insgesammt weggenommen werden sollen, so ist es eben so viel, als wann man ihre Summe nemlich 25 auf einmal von 50 abzieht, da dann, wie vorher, 25 übrig bleiben.

13.

Eben so läßt sich auch leicht der Werth solcher Formeln bestimmen, in welchen beyde Zeichen + plus und — minus vorkommen; als z. E.

12 — 3 — 5 + 2 — 1 ist so viel als 5.

Oder man darf nur die Summe derer Zahlen die + vor sich haben, besonders nehmen, als;

12 + 2 machen 14, und davon die Summe aller Zahlen die — vor sich haben, welche sind 3, 5, 1,

das ist 9 abziehen, da dann wie vorher gefunden wird 5.

14.

Hieraus ist klar, daß es hierbey gar nicht auf die Ordnung der hergesetzten Zahlen ankomme, sondern daß man dieselben nach Belieben versetzen könne, wann nur eine jede das ihr vorstehende Zeichen behält; also, anstatt der obigen Formel kan man setzen.

$$12 + 2 - 5 - 3 - 1. \text{ oder } 2 - 1 - 3 - 5 + 12.$$

$$\text{oder } 2 + 12 - 3 - 1 - 5;$$

wobey aber zu mercken daß in obiger Formel vor der Zahl 12 das Zeichen + vorgesetzt verstanden werden muß.

15.

Wann nun die Sache allgemein zu machen, anstatt der würcklichen Zahlen, Buchstaben gebraucht werden, so begreift man auch leicht die Bedeutung davon als z. E.

a − b − c + d − e deutet an, daß die durch die Buchstaben a und d ausgedruckte Zahlen hergelegt werden,

und

und davon die übrigen b, c, e, welche das Zeichen — haben insgesammt weggenommen werden müßen.

16.

Hier kommt also die Hauptsache darauf an, was für ein Zeichen eine jegliche Zahl vor sich stehen hat; daher pflegt man in der Algebra die Zahlen mit ihren vorstehenden Zeichen, als einzelne Größen zu betrachten, und diejenigen welche das Zeichen + vor sich haben, bejahende oder positive Größen zu nennen; diejenigen aber welche das Zeichen — vor sich haben, werden verneinende oder negative Größen genennet.

17.

Dieses läßt sich schön durch die Art erläutern, wie das Vermögen einer Person pflegt angezeigt zu werden; da dasjenige, was sie würcklich besitzt durch positive Zahlen mit dem Zeichen + plus, dasjenige aber was sie schuldig ist, durch negative Zahlen mit dem Zeichen — minus ausgedruckt wird. Also wann jemand 100 Rubel hat, dabey aber 50 schuldig ist, so wird sein Vermögen seyn

100 — 50. oder welches einerley,

+ 100 — 50. das ist 50.

18.

18.

Da nun die negative Zahlen als Schulden betrachtet werden können, in so fern die positive Zahlen die würckliche Besitzungen anzeigen, so kann man sagen, daß die negative Zahlen weniger sind als nichts; also wenn einer nichts im Vermögen hat und noch darzu 50. Rub. schuldig ist, so hat er würcklich 50. Rub. weniger als nichts; dann wann ihm jemand 50. Rub. schencken sollte um seine Schulden zu bezahlen, so würde er alsdann erst nichts haben, da er doch jetzt mehr hatte als vorher.

19.

Wie nun die positive Zahlen ohnstreitig gröſser als nichts, so sind die negative Zahlen kleiner als nichts. Die positive Zahlen aber entstehen, wann man erstlich zu o, oder nichts, immerfort eines zusetzt, da dann die Reihe der sogenannten natürlichen Zahlen entspringt, nehmlich.

$0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9, +10,$

und so fort ins unendliche.

Wird aber diese Reihe rückwärts fortgesetzt, und immer eins mehr weggenommen, so entspringt folgende Reihe der negativen Zahlen

$0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10,$

und so fort ohne Ende.

20.

Alle diese Zahlen, so wohl positive als negative, führen den bekannten Nahmen der ganzen Zahlen, welche also entweder größer oder kleiner sind als nichts. Man nennt dieselbe gantze Zahlen um sie von den gebrochenen, und noch vielerley andern Zahlen, wovon unten gehandelt werden wird, zu unterscheiden. Dann da zum Exempel 50 um ein gantzes größer ist als 49, so begreift man leicht daß, zwischen 49 und 50 noch unendlich viel Mittel-Zahlen statt finden können, welche alle größer als 49, und doch alle kleiner als 50 sind. Man darf sich zu diesem Ende nur 2 Linien vorstellen, deren eine 50 Fuß, die andre aber 49 Fuß lang ist, so wird man leicht begreiffen, daß man unendlich viel andre Linien ziehen kan, welche alle länger als 49 und doch kürtzer als 50 Fuß sind.

21.

Dieser Begriff von den verneinenden oder negativen Größen ist um so viel sorgfältiger zu bemercken, da derselbe in der gantzen Algebra von der größten Wichtigkeit ist. Hier wird genung seyn zum voraus zu bemercken, daß diese Formel, z. E.

$$+1-1, +2-2, +3-3, +4-4, \text{ u. s. f.}$$

alle so viel sind als 0, oder nichts: ferner, daß z. Ex.

+ 2

+ 2 — 5 so viel ist als — 3, weil wann einer 2 Rbl. hat, und 5 Rbl. schuldig ist, so hat er nicht nur nichts, sondern bleibt noch 3 Rbl. schuldig: eben so ist,

7 — 12 so viel als — 5

25 — 40 so viel als — 15

22.

Eben dieses ist auch zu beobachten, wann auf eine allgemeine Art anstatt der Zahlen Buchstaben gebraucht werden, da dann immer + a — a, so viel ist als o oder nichts. Hernach wann man wißen will, was z. E. + a — b bedeute, so sind zwey Fälle zu erwegen.

Der 1te ist, wann a gröser als b, da subtrahiret man b von a, und der Rest positiv genommen ist der gesuchte Werth.

Der 2te ist, wann a kleiner als b, da subtrahiret man a von b, und der Rest negativ genommen, oder das Zeichen minus — vorgesetzt, zeigt den gesuchten Werth an.

Captitel

Capitel 3.

Von der Multiplication mit einfachen Größen.

23.

Wann zwey, oder mehr gleiche Zahlen zusammen addirt werden, so läßt sich die Summe auf eine kürtzere Art ausdrücken also ist;

a + a so viel als 2. a, und
a + a + a " " " 3. a, ferner
a + a + a + a " " 4. a, und so weiter.

Woraus der Begriff von der Multiplication entspringt, nehmlich da

2. a so viel ist, als 2 mal a, und
3. a so viel als 3 mal a, ferner
4. a so viel als 4 mal a, u: s: fort.

24.

Wann also eine durch einen Buchstaben ausgedruckte Zahl mit einer beliebigen Zahl multipliciret werden soll, so wird die Zahl blos vor den Buchstaben geschrieben; also,

a mit

a mit 20 mult. giebt 20 a, und
b mit 30 mult. giebt 30 b, etc.

Solcher gestalt ist ein c, einmahl genommen, oder 1 c, so viel als c.

25.

Dergleichen Producte können auch noch weiter leicht mit andern Zahlen multipliciret werden, als z. E.

2 mal 3 a macht 6 a
3 mal 4 b macht 12 b
5 mal 7 x macht 35 x,

welche noch ferner mit Zahlen nach Belieben können multipliciret werden.

26.

Wann die Zahl mit welcher multipliciret werden soll, auch durch einen Buchstaben vorgestelt wird, so wird derselbe dem andern Buchstaben unmittelbar vorgesetzt; also wann b mit a multipliciret werden soll, so heißt das Product a b, und p q ist das Product welches entsteht wann man die Zahl q mit p multiplicirt. Will man p q, noch ferner mit a, multipliciren so kömmt heraus apq.

27.

Hiebey ist wohl zu mercken, daß es auch hier nicht auf die Ordnung der an einander gesetzten Buchstaben an-

ankomme, indem a b eben so viel ist als b a; oder b und a mit einander multiplicirt, macht eben so viel als a mit b multiplicirt. Um dieses zu begreifen darf man nur für a und b bekannte Zahlen, als 3 und 4 nehmen, so giebt es sich von selbsten: nehmlich 3 mal 4 ist eben so viel, als 4 mal 3.

28.

Wann anstatt der Buchstaben welche unmittelbar an einander geschrieben sind, würckliche Zahlen sollen gesetzt werden, so sieht man leicht, daß dieselben alsdann nicht unmittelbar hinter einander geschrieben werden können. Dann wann man vor 3 mal 4 schreiben wollte 34, so würde solches nicht zwölff sondern vier und dreissig heißen. Wann derowegen eine Multiplication mit bloßen Zahlen angedeutet werden soll, so pflegt man einen Punct zwischen dieselben zu setzen: also

3. 4, bedeutet 3 mal 4, das ist 12, eben so ist 1. 2. so viel als 2. und 1. 2. 3, ist 6. ferner 1. 2. 3. 4. 56, ist 1344. und 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. ist 3628800 u. s. f.

29.

Hieraus ergiebt sich nun auch was eine solche Formul 5. 7. 8. a b c d, bedeute; nehmlich 5 wird erstlich mit 7, multipliciret, das Product ferner mit 8, dies

ses Product hernach mit a, und dieses wieder mit b, sodann mit c, und endlich mit d multipliciret; wobey zu mercken, daß anstatt 5. 7. 8, der Werth davon, nemlich die Zahl 5 mal 7, ist 35, und 8 mal 35 ist 280, geschrieben werden kan.

30.

Ferner ist zu mercken, daß solche Formel die aus der Multiplication mehrerer Zahlen entstehen, Producte genent werden. Zahlen oder Buchstaben aber, welche einzeln sind, pflegt man Factores zu nennen.

31.

Bis hierher haben wir nur positive Zahlen betrachtet, und da ist gar kein Zweifel, daß die daher entstehenden Producte nicht auch positive seyn sollten: nehm- + a mit + b multipliciret giebt ohnstreitig + ab: was aber herauskomme, wann + a mit — b oder — a mit — b multipliciret werde, erfordert eine besondere Erörterung.

32.

Wir wollen erstlich — a mit 3 oder + 3, multipliciren; weil nun — a als eine Schuld angesehen werden kann, so ist offenbar, daß wann diese Schuld 3 mal genommen wird, dieselbe auch 3 mal größer werden

müße

müße, folglich wird das gesuchte Product — 3 a seyn. Eben so wann — a mit b das ist + b multiplicirt werden soll, so wird heraus kommen — ba, oder welches einerley — ab. Hieraus machen wir den Schluß, daß wann eine positive Größe mit einer negativen multiplicirt werden soll, das Product negativ werde; woher diese Regul gemacht wird, + mit + giebt + oder plus, Hingegen + mit —, oder — mit + multipliciret giebt — oder minus.

33.

Nun ist also noch dieser Fall zu bestimmen übrig: nehmlich wann — mit — multiplicirt wird, oder — a, mit — b. Hierbey ist zuerst klar, daß das Product in Ansehung der Buchstaben heißen werde, ab: ob aber das Zeichen + oder — dafür zu setzen sey, ist noch ungewiß, so viel aber ist gewis, daß es entweder das eine, oder andere seyn muß. Nun aber, sage ich, kan es nicht das Zeichen — seyn? Dann — a mit + b mult. giebt — ab, und also — a mit — b mult. kann nicht eben das geben was — a mit + b giebt, sondern es muß das Gegentheil herauskommen, welches nehmlich heißt, + a b. Hieraus entsteht diese Regul, — mit — multiplicirt giebt + eben so wohl als + mit +.

34.

Diese Regeln pflegen zusammengezogen und kürtzlich mit diesen Worten ausgedruckt zu werden: Zwey gleiche Zeichen mit ein ander multipliciret geben +, zwey ungleiche Zeichen aber geben —. Wann also zum Ex. diese Zahlen,

+ a, — b, — c, + d, mit einander multiplicirt werden sollen, so giebt erstlich + a mit — b, mult. — ab, dieses mit — c, giebt + abc, und dieses endlich mit + d, giebt + abcd.

35.

Da nun die Sache in Ansehung der Zeichen keine Schwierigkeit hat, so ist noch übrig zu zeigen wie zwey Zahlen, die schon selbsten Producte sind, mit ein ander multiplicirt werden sollen. Wann die Zahl ab mit der Zahl cd multiplicirt werden soll, so ist das Product a b c d, und entsteht also wann man erstlich ab mit c, und das, was man durch die Multiplication gefunden, ferner mit d multiplicirt. Oder also, wann man z. E. die Zahl 36 mit 12 multipliciren soll: weil 12 ist 3 mal 4, so hat man nur nöthig 36 erstlich mit 3 zu multipliciren und das gefundene, nemlich 108 ferner mit 4 zu multipliciren. Da man dann erhält:

432. welches so viel ist als 12. mahl 36.

36.

Wollte man aber 5 ab mit 3 cd multipliciren, so könte man auch wohl setzen 3 cd 5 ab: da es aber hier eben nicht auf die Ordnung derer mit einander multiplicirten Zahlen ankommt, so pflegt man die bloße Zahlen zuerst zu setzen und schreibt für das Product 5. 3 abcd. oder 15 abcd, weil 5 mahl 3 so viel ist als 15.

Eben so wann 12 pqr mit 7 xy, multiplicirt werden sollte, so erhält man 12. 7 pqrxy, oder 84 pqrxy.

Capitel 4.

Von der Natur der gantzen Zahlen in Absicht auf ihre Factoren.

37.

Wir haben bemerckt, daß ein Product aus 2. oder mehr mit einander multiplicirten Zahlen entstehe. Diese Zahlen werden die **Factores** davon genennt.

Also sind die Factores des Products abcd die Zahlen a, b, c, d.

38.

Zieht man nun alle gantze Zahlen in Betrachtung, in so fern dieselben durch die Multiplication zweyer oder mehrerer Zahlen entstehen können, so wird man bald finden, daß einige gar nicht durch die Multiplication entspringen können und also keine Factoren haben, andere aber aus 2 und auch mehr Zahlen mit einander mult. entstehen können, folglich 2 oder mehr Factores haben: also ist:

4 so viel als 2. 2, ferner 6 so viel als 2. 3, und
8 so viel als 2. 2. 2, ferner 27 so viel 3. 3. 3, und
10. so viel als 2. 5, und so fort.

39.

Hingegen laßen sich die Zahlen

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. nicht solchergestalt durch Factores vorstellen, es wäre dann daß man auch 1, zu Hülfe nehmen, und z. E. 2 durch 1. 2, vorstellen wollte. Allein da mit 1, multiplicirt die Zahl nicht verändert wird, so wird 1 auch nicht unter die Factores gezehlt.

Alle diese Zahlen nun, welche nicht durch Factores vorgestellt werden können, als:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. werden **einfache** Zahlen, oder **Prim-Zahlen** genennt; die übrigen Zahlen aber welche sich durch Factores vorstellen laßen als:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, etc. heißen **zu-sammengesetzte** Zahlen.

40.

Die einfache- oder Prim-Zahlen verdienen also besonders wohl in Erwegung gezogen zu werden, weil dieselben aus keiner Multiplication zweyer oder mehrerer Zahlen mit einander entstehen können. Wobey insonderheit dieses merckwürdig ist, daß wann dieselben der Ordnung nach geschrieben werden, als:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43' 47, u. s. f. darinnen keine gewiße Ordnung wahrgenommen wird, sondern dieselben bald um mehr, bald um weniger fortspringen.

Und es hat auch bisher kein Gesetze, nach welchen dieselben fortgiengen, ausfindig gemacht werden können.

41.

Die zusammengesetzten Zahlen aber, welche sich durch Factores vorstellen laßen, entspringen alle aus den obigen Prim-Zahlen, so das alle Factores davon Prim-Zahlen sind. Dann wann je ein Factor keine Prim-Zahl, sondern schon zusammengesetzt wäre,

so würde man denselben wieder durch 2 oder mehr Factores die Prim-Zahlen wären, vorstellen können. Also wann die Zahl 30 durch 5. 6 vorgestellt wird, so ist 6 keine Prim-Zahl sondern 2. 3, und also kan 30 durch 5. 2. 3, oder durch 2. 3. 5, vorgestellt werden, wo alle Factores Prim-Zahlen sind.

42.

Erwegt man nun alle zusammengesetzte Zahlen, wie solche durch Prim-Zahlen vorgestellt werden können, so findet sich darinnen ein großer Unterschied, indem einige nur 2 dergleihe Factores haben, andere 3 oder mehr: also ist wie wir schon gesehen

4 so viel als 2. 2,	6 so viel als 2. 3,
8 .... 2. 2. 2,	9 .... 3. 3,
10 ..... 2. 5,	12 ... 2. 3. 2,
14 .... 2. 7,	15 ... 3. 5,
16 ... 2. 2. 2. 2,	und so fort.

43.

Hieraus läßt sich begreifen, wie man von einer jeglichen Zahl ihre einfache Factores finden soll.

Also wann die Zahl 360 vorgegeben wäre, so hat man für dieselbe erstlich 2. 180.

Nun

Nun aber ist

180 so viel als	2. 90 und
90 so viel als	2. 45 und
45 so viel als	3. 15 und endlich
15 so viel als	3. 5.

Folglich wird die Zahl 360 durch folgende einfache Factores vorgestellt.

2. 2. 2. 3. 3. 5,

als welche Zahlen alle mit einander multiplicirt, die Zahl 360 vorbringen.

44.

Wir sehen also hieraus, daß sich die Prim-Zahlen durch keine andre Zahlen theilen laßen, und hingegen die zusammengesetzten Zahlen am füglichsten in ihre einfache Factores aufgelößet werden, wann man alle einfache Zahlen sucht, durch welche sich dieselben theilen laßen. Allein hiebey wird die Division gebraucht, von welcher in dem folgenden Capitel die Regeln erklärt werden sollen.

Capitel 5.

Von der Division mit einfachen Größen.

45.

Wann eine Zahl in 2, 3, oder mehr gleiche Theile zertheilt werden soll, so geschieht solches durch die Division, welche die Größe eines solchen Theils bestimmen lehret. Also wann die Zahl 12 in 3 gleiche Theile zertheilt werden soll, so findet man durch die Division, daß ein solcher Theil 4 sey.

Man bedienet sich aber dabey gewißer Nahmen. Die Zahl die zertheilt werden soll, heißt das **Dividend** oder die zu theilende Zahl: die Anzahl der Theile wird der **Divisor**, oder **Theiler** genennt. Die Größe eines solchen Theils aber, welcher durch die Division gefunden wird, pflegt der **Quotus** oder **Quotient** genennt zu werden: also ist dem angeführten Exempel nach

12 das Dividend, oder die zu theilende Zahl.
3 der Divisor, oder Theiler, und
4 der Quotus, oder Quotient.

46.

46.

Wann man also eine Zahl durch 2 theilt oder in 2 gleiche Theile zerschneidet, so muß ein solcher Theil, das ist, der Quotus zweymal genommen, just die vorgegebene Zahl ausmachen; eben so wann eine Zahl durch 3 getheilt werden soll, so muß der Quotus 3 mal genommen dieselbe Zahl ausmachen; ja es muß überhaupt immer das Dividend herauskommen, wann man den Quotus und den Divisor mit einander multiplicirt.

47.

Dahero wird auch die Division also beschrieben, daß man für den Quotient eine solche Zahl suche, welche mit dem Divisor multiplicirt just die zu theilende Zahl hervorbringe. Also wann zum Exempel 35 durch 5 getheilt werden soll, so sucht man eine Zahl, welche mit 5 multiplicirt 35 herausbringe. Diese Zahl ist demnach 7, weil 5 mal 7, 35 ausmacht. Man pflegt sich dabey dieser Redens-Art zu bedienen: 5 in 35 habe ich 7 mal; dann 5 mal 7 ist 35.

48.

Man stellt sich demnach das Dividend als ein Product vor, von welchem der eine Factor dem Divisor gleich

ist

ist, da dann der andere Factor den Quotienten anzeigt.

Wann ich also 63 durch 7 dividiren soll, so suche ich ein Product, davon der eine Factor 7 und der andere also beschaffen ist, daß wann derselbe mit diese 7 multipliciret wird, genau 63 herauskommen. Ein solches ist nun 7. 9, und deswegen ist 9 der Quotus, welcher entspringt wenn man 63 durch 7 dividirt.

49.

Wann dahero auf eine allgemeine Art die Zahl ab durch a getheilt werden soll, so ist der Quotus offenbar b, weil a mit b multiplicirt das dividend ab ausmacht. Hieraus ist klar, daß wann man ab durch b dividiren soll, der Quotus a seyn werde.

Also überhaupt in allen Divisions-Exempeln wann man das Dividend durch den Quotus dividirt, so muß der Divisor herauskommen: als da 24 durch 4 dividirt 6 giebt, so giebt auch umgekehrt 24 durch 6 dividirt 4.

50.

Wie nun alles darauf ankommt, daß man das Dividend durch 2 Factores vorstelle, deren einer dem Divisor gleich sey, weil alsdann der andere den Quotus

ank-

anzeigt, so wird man die folgende Exempel leicht verstehen. Erstlich das Dividend a b c durch a dividirt giebt bc, weil a mit bc multiplicirt a b c ausmacht: eben so wann abc durch b dividirt wird, so kommt a c heraus; und abc durch ac dividirt giebt b. Hernach 12 m n durch 3 m dividirt giebt 4 n, weil 3 m mit 4 n multiplicirt 12 m n ausmacht: wann aber eben diese Zahl 12 m n durch 12 dividirt werden sollte, so würde m n herauskommen.

51.

Weil eine jede Zahl a durch 1 a, oder ein a, ausgedruckt werden kann, so ist hieraus offenbahr, daß wann man a oder 1a durch 1 theilen soll, alsdann eben dieselbe Zahl a für den Quotus heraus komme. Hingegen wann eben dieselbe Zahl a oder 1a durch a getheilet werden soll, so wird der Quotus 1 seyn.

52.

Es geschiehet aber nicht immer, daß man das Dividend als ein Product von 2 Factoren vorstellen könne, deren einer dem Divisor gleich sey, und in solchen Fällen läßt sich die Division nicht auf diese Art bewerckstelligen. Dann wann ich z. E. 24 durch 7 dividiren soll, so ist die Zahl 7 kein Factor von 24, wiel 7. 3 erst 21. und also zu wenig, hingegen 7. 4, schon 28,

und

und also zu viel ausmacht: doch sieht man hieraus daß der Quotus größer seyn müße als 3, und doch kleiner als 4. Dahero um denselben genau zu bestimmen eine andere Art von Zahlen, die Brüche genennt werden, zu Hülfe genommen werden muß, wovon in einem der folgenden Capitel gehandelt werden soll.

53.

Ehe man aber zu den Brüchen fortschreitet, so begnügt man sich für den Quotus die nächst kleinere gantze Zahl anzunehmen, dabey aber den Rest zu bestimmen, welcher übrig bleibt; also sagt man 7 in 24 hab ich 3 mal, der Rest aber sey 3, weil 3 mal 7 nur 21 macht, so um 3 zu klein ist. Eben so sind folgende Exempel zu verstehen, als:

6	34	5	nemlich der Divisor ist 6,
	30		das Dividend ist 34,
	4		der Quotient ist 5,
			der Rest ist 4,
9	41	4	und hier ist der Divisor 6,
	36		das Dividend 41,
	5		der Quotient 4,
			der Rest 5,

In solchen Exempeln wo ein Rest übrig bleibt ist folgende Regul zu mercken.

54.

54.

Erstlich daß wann man den Theiler mit dem Quotus multipliciret und zum Product noch den Rest addirt, alsdann das Dividend heraus kommen müße; und auf diese Art pflegt man die Division zu probiren, ob man recht gerechnet habe oder nicht.

Also in dem ersten der zwey letztern Exempel, multiplicirt man 6. 5, ist 30, dazu den Rest 4 addirt, kommt just das Dividend 34.

Ebenfalls in dem letzten Exempel, wann man den Theiler 9 mit dem Quotus 4 multiplicirt und zum Product 36 noch den Rest 5 addirt, so erhält man das Dividend 41.

55.

Letztlich ist hier auch noch nöthig in Ansehung der Zeichen plus + und minus — anzumercken, daß wann + a b durch + a dividirt wird, der Quotus + b seyn werde, welches für sich klar ist.

Wann aber + a b durch — a dividirt werden soll, so wird der Quotus — b seyn, weil — a mit — b mult. + ab ausmacht.

Wann ferner das Dividend — a b heißt, und durch den Theiler + a dividirt werden soll, so wird

der

der Quotus — b seyn, weil + a mit — b mult: — ab giebt, das ist das Dividend.

Soll endlich das Dividend — ab durch den Divisor — a getheilt werden, so wird der Quotus + b seyn, weil — a mit + b multiplicirt — a b, ausmacht.

56.

Es finden also in der Division für die Zeichen + und — eben dieselben Regeln statt, welcher wir oben bey der Multiplication angemercket haben, nehmlich.

+ durch + giebt + : + durch — giebt — : — durch + giebt — : — durch — giebt + ;

oder kürtzer, gleiche Zeichen geben plus, ungleiche aber minus.

57.

Wann also 18 pq durch — 3 p dividiret werden soll so wird der Quotient — 6 q seyn.
ferner : — 30 xy durch + 6 y dividirt giebt — 5 x
ferner : — 54 abc durch — 9 b div: giebt + 6 ac: weil — 9 b mit + 6 ac mult: — 6. 9 a bc, oder — 54 abc giebt: welches für die Division mit einfachen Größen genung seyn mag. Dahero wir zur Erklärung der Brüche fortschreiten wollen, nachdem wir vorher noch etwas von der Natur der Zahlen in Ansehung ihrer Theiler werden bemercket haben.

Capitel

Capitel 6.

Von den Eigenschaften der gantzen Zahlen in Ansehung ihrer Theiler.

58.

Da wir gesehen haben, daß sich einige Zahlen durch gewiße Divisores theilen laßen, andere aber nicht, so ist zur Erkänntniß der Zahlen nöthig, diesen Unterschied wohl zu bemercken, und diejenigen Zahlen die sich durch irgend einen Divisor theilen laßen, von denjenigen die sich dadurch nicht theilen laßen, wohl zu unterscheiden, und zugleich auch den Rest, welcher bey der Division der letztern übrig bleibt, wohl anzumercken; zu welchem Ende wir die Divisores,

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, und so fort, betrachten wollen.

59.

Es sey erstlich der Divisor 2; die Zahlen also, welche sich dadurch theilen laßen, sind folgende:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, u. s. f.
welche denn so fort immer um 2 steigen. Diese Zahlen werden insgesamt **gerade Zahlen** genennt.

Hingegen die übrigen Zahlen
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, u. s. f.
welche sich durch 2 nicht theilen laßen, ohne daß nicht 1, im Rest bliebe; werden **ungerade Zahlen** genennt, und sind also immer um eins größer oder kleiner als die gerade Zahlen. Die gerade Zahlen können nun alle in dieser allgemeinen Formel 2 a begriffen werden, weil wann man für a nach und nach alle Zahlen annimt als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. u. s. f. daraus alle gerade Zahlen entspringen. Hingegen sind alle ungerade Zahlen in dieser Formel $2a + 1$ enthalten, weil $2a + 1$ um 1 größer ist als die gerade Zahl 2 a.

60.

Zweytens. Es sey der Divisor 3, so sind alle Zahlen welche sich dadurch theilen laßen folgende:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, u. s. f.
welche durch diese Formel 3a vorgestellt werden können. Dann 3a, durch 3 dividirt giebt a zum Quotus, ohne Rest; die übrigen Zahlen aber, wann man sie durch 3 theilen will, laßen entweder 1, oder 2, zum Rest übrig,

und

und sind also von zweyerley Art. Die welche 1 übrig laßen, sind folgende:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, u. s. f.

und sind in dieser Formel $3a + 1$, enthalten. Die von der andern Art welche 2 übrig laßen sind folgende:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, u. s. f.

welche alle in dieser Formel $3a + 2$, enthalten sind: also daß alle Zahlen entweder in der Form $3a$, oder in dieser $3a + 1$, oder in dieser $3a + 2$, enthalten sind.

61.

Wann ferner der Divisor 4 ist, so sind alle Zahlen, die sich dadurch theilen laßen, folgende,

4, 8, 12, 16, 20, 24, u. s. f.

welche immer um 4 steigen, und in der Formel $4a$ enthalten sind. Die übrigen Zahlen aber, welche sich durch 4 nicht theilen lassen, laßen enweder 1, zuu Rest und sind um 1 größer als jene, nehmlich:

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, u. s. f.

welche folglich in dieser Formel $4a + 1$, enthalten sind. Oder sie laßen 2 zum Rest, als:

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, u. s. f.

und sind in der Formel $4a + 2$ enthalten.

Oder endlich bleibt 3 zum Rest übrig, solche Zahlen sind folgende :

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, u. s. f.

und sind in dieser Formel $4a + 3$, enthalten, so daß alle Zahlen in einer von diesen vier Formeln

$4a$, $4a + 1$, $4a + 2$, $4a + 3$, enthalten sind.

62.

Eben so verhält sich die Sache mit dem Divisor 5, da alle Zahlen, welche sich dadurch theilen laßen, in der Formel $5a$ enthalten sind ; diejenigen aber, welche sich dadurch nicht theilen laßen, sind entweder :

$5a + 1$, $5a + 2$, $5a + 3$, oder $5a + 4$,

und so kan man weiter zu allen größern Divisoren fortschreiten.

63.

Hierbey kommt nun zu statten, was oben von der Auflösung der Zahlen in ihre einfache Factores vorgebracht worden, weil eine jegliche Zahl, unter deren Factoren sich entweder:

2, oder 3, oder 4, oder 5, oder 7,

oder eine andere Zahl befindet, sich auch durch dieselbe theilen läßt: da zum Exempel

60 so viel ist als: 2. 2. 3. 5,
so ist klar, daß sich 60 durch 2, durch 3 und auch durch 5 theilen laße.

64.

Da hernach überhaupt die Formel a b c d. sich nicht nur durch a und b und c uud d, sondern auch durch folgende

ab, ac, ad, bc, bd, cd, ferner auch durch
abc, abd, acd, bcd, und endlich auch durch
abcd, das ist durch sich selbst, theilen läßt, so läßt sich gleichfals 60 das ist 2. 2. 3. 5, außer den einfachen Zahlen, auch durch die theilen, die aus zwey einfachen zusammen gesetzt sind, nehmlich durch

4, 6, 10, 15, ferner auch durch die welche aus dreien bestehen als:

12, 20, 30, und endlich auch durch 60, das ist durch sich selbst.

65.

Wann man also eine jegliche beliebige Zahl durch ihre einfache Factores vorgestellt hat, so ist es sehr leicht alle diejenigen Zahlen anzuzeigen, wodurch sich dieselbe theilen läßt. Dann man darf nur erstlich einen

jeden von den einfachen Factoren für sich selbst nehmen, hernach, je zwey, je drey, je vier, und so fort mit einander multipliciren bis man auf die vorgegebene Zahl selbst kommt.

66.

Vor allen Dingen ist hier zu mercken, daß sich eine jede Zahl durch 1 theilen laße, so wie sich auch eine jede Zahl durch sich selbst theilen läst; also daß eine jede Zahl zum wenigsten zwey Theiler oder Divisores hat, nemlich 1, und sich selbsten; welche Zahlen nun außer diesen beyden Theilern, keine andere haben, sind eben diejenigen, welche oben sind einfache oder Prim-Zahlen genennt worden.

Alle zusammen gesetzte Zahlen aber haben außer 1 und sich selbsten, noch andere Divisores, wie aus folgender Tafel zu sehen ist, wo unter jeder Zahl alle ihre Theiler sind gesetzt worden.

Tafel

Tafel.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	3	2	5	2	7	2	3	2	11	2	13	2	3	2	17	2	19	2
			4		3		4	9	5		3		7	5	4		3		4
					6		8		10		4		14	15	8		6		5
											6				16		9		10
											12						18		20
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
P.	P.	P.		P.		P.				P		P.				P.		P.	

67.

Endlich ist noch zu mercken das ○, als eine solche Zahl angesehen werden kann, welche sich durch alle mögliche Zahlen theilen läßt; weil wann man ○, durch eine jegliche Zahl als a theilen soll, der Quotus immer ○ ist, dann ○ mal a, oder ○ a ist ○: weil es wohl zu mercken ist, daß eine jede Zahl mit ○, multiplicirt nichts heraus bringe.

Capitel 7.

Von den Brüchen überhaupt.

68.

Wenn sich eine Zahl als zum Ex. 7 durch eine andere als 3 nicht theilen läßt, so ist dieses nur so zu verstehen, daß sich der Quotus nicht durch eine gantze Zahl ausdrucken läßt, keines weges aber, daß es an sich unmöglich sey, sich einen Begriff von dem Quotus zu machen.

Man darf sich nur eine Linie, die 7 Fuß lang ist, vorstellen, so wird wohl niemand zweifeln, daß es nicht möglich seyn sollte, diese Linie in 3 gleiche Theile zu zerschneiden und sich einen Begriff von der Größe eines solchen Theils zu machen.

69.

Da man sich nun einen deutlichen Begriff von dem Quotus, der in solchen Fällen herauskommt machen kan, obgleich derselbe keine gantze Zahl ist, so werden wir hierdurch auf eine besondere Art von Zahlen geleitet, welche **Brüche** oder **gebrochene Zahlen** genent werden.

Also

Also haben wir in obigem Exempel, wo 7 durch 3 dividirt werden soll, einen deutlichen Begriff von dem daher entspringenden Quotus, und man pflegt denselben auf folgende Art anzuzeigen $\frac{7}{3}$; wo die obengesetzte Zahl 7 das Dividend und die untengesetzte Zahl 3 der Divisor ist.

70.

Wann also auf eine allgemeine Art die Zahl a, durch die Zahl b, getheilt werden soll, so wird der Quotus durch $\frac{a}{b}$ angedeutet, welche Schreib-Art ein Bruch genennt wird; dahero man sich keinen beßern Begriff von einem solchen Bruch $\frac{a}{b}$ machen kann, als daß man sagt, es werde dadurch der Quotus angezeigt, welcher entspringe, wann man die obere Zahl durch die untere Zahl dividire. Hierbey ist noch zu mercken, daß bey allen dergleichen Brüchen, die untere Zahl der **Nenner**, die obere aber der **Zehler** genennt zu werden pflegt.

71.

In dem oben angeführten Bruch $\frac{7}{3}$, welcher mit dem Worte Sieben Drittel ausgesprochen wird, ist 7 der Zehler, und 3 der Nenner. Eben so heißt dieser Bruch

$\frac{2}{3}$ zwey Drittel. $\frac{3}{4}$ drey Viertheil.
$\frac{3}{8}$ drey Achtel $\frac{12}{100}$ zwölff Hundertstheil.

Dieser Bruch aber $\frac{1}{2}$ wird genennet, ein halbes, anstatt ein zweytel; dann eigentlich ist $\frac{1}{2}$ der Quotus, welcher heraus kommt, wann man 1 in zwey gleiche Theile zerschneidet, da dann wie bekandt ein solcher theil ein halbes genennt wird.

72.

Um die Natur der Brüche recht kennen zu lernen, wollen wir erstlich diesen Fall betrachten, wo die obere Zahl der untern, oder der Zehler dem Nenner gleich ist, als $\frac{a}{a}$. Weil nun dadurch der Quotus angedeutet wird, der heraus kommt, wann man a durch a dividiret: so ist klar, daß dieser Quotus just 1 ist folglich ist dieser Bruch $\frac{a}{a}$ so viel als 1, oder ein gantzes, daher sind folgende Brüche

$\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$, u. s. f. alle einander gleich, und ein jeder derselben ist so viel als Eins, oder ein Gantzes.

73.

Da nun ein jeder Bruch, deßen Zehler dem Nenner gleich ist Eins beträgt, so sind alle Brüche, deren Zehler kleiner sind als ihre Nenner, weniger als

Eins

Eins. Dann wann ich eine kleinere Zahl durch eine größere dividiren soll, so kommt weniger als 1 heraus; wann z. E. eine Linie von 2 Fuß in 3 gleiche Theile zerschnitten werden soll, so wird ein Theil ohnstreitig kleiner seyn als ein Fuß, dahero offenbar daß $\frac{2}{3}$ weniger als 1, und dieses eben deswegen, weil der Zehler 2 kleiner ist als der Nenner 3.

74.

Wann hingegen der Zehler größer ist als der Nenner, so ist der Werth des Bruchs größer als Eins. Also ist $\frac{3}{2}$ mehr als 1, weil $\frac{3}{2}$ so viel ist als $\frac{2}{2}$ und noch $\frac{1}{2}$. Nun aber ist $\frac{2}{2}$ so viel als 1, folglich ist $\frac{3}{2}$ so viel als $1\frac{1}{2}$ nehmlich ein Gantzes und noch ein halbes. Eben so ist:

$\frac{4}{3}$ so viel als $1\frac{1}{3}$; ferner $\frac{5}{3}$ so viel als $1\frac{2}{3}$;
weiter $\frac{7}{3}$ so viel als $2\frac{1}{3}$.

Und überhaupt darf man in diesen Fällen nur die obere Zahl durch die untere dividiren, und zum Quotus noch einen Bruch hinzusetzen, deßen Zehler der Rest, der Nenner aber der Divisor ist. Also für den Bruch $\frac{43}{12}$, dividirt man 43 durch 12 und bekommt 3 zum Quotus und 7 zum Rest, daher ist $\frac{43}{12}$ so viel als $3\frac{7}{12}$.

75.

75.

Hieraus sieht man, wie Brüche deren Zehler gröſser sind als ihre Nenner, in zwey Glieder aufgelöſst werden können, wovon das erste eine gantze Zahl ausmacht das andre aber ein Bruch, deſsen Zehler kleiner ist als sein Nenner. Aus diesem Grunde werden solche Brüche, wo der Zehler gröſser ist als der Nenner, **unächte Brüche** genennt, weil sie eins, oder mehr Gantze in sich begreifen. Hingegen sind die **ächten Brüche** solche, deren Zehler kleiner sind als die Nenner, und deren Werth folglich weniger ist als Eins, oder weniger als ein Gantzes.

76.

Man pflegt sich die Natur der Brüche noch auf eine andere Art vorzustellen, wodurch die Sache nicht wenig erleutert wird: Wann man z. E. den Bruch $\frac{3}{4}$ betrachtet, so ist klar daſs derselbe 3 mal gröſser ist als $\frac{1}{4}$. Nun aber bestehet die Bedeutung des Bruchs $\frac{1}{4}$ darinnen, daſs wann man 1 in 4 gleiche Theile zertheilt, ein solcher Theil den Werth desselben anzeiget; wann man daher solcher drey Theile zusammennimt, so erhält man den Werth des Bruchs $\frac{3}{4}$.

Eben so kan man einen jeglichen andern Bruch betrachten, als, $\frac{7}{12}$: wann man 1 in 12 gleiche Theile zer=

zerschneidet, so machen 7 dergleichen Theile den Werth des vorgelegten Bruchs aus.

77.

Aus dieser Vorstellung sind auch die oben erwehnten Nahmen des Zehlers und Nenners entsprungen. Dann weil in dem vorigen Bruch $\frac{7}{1}$, die untere Zahl 12 anzeiget, daß 1 in 12 gleiche Theile zertheilt werden müße, und also diese Theile benennet, so wird dieselbe füglich der Nenner genennt.

Da aber die obere Zahl, nemlich 7, anzeigt, daß für den Werth des Bruchs 7 dergleichen Theile zusammen genommen werden müßen, und also dieselbe gleichsam darzehlet, so wird die obere Zahl der Zehler genennt.

78.

Betrachten wir nun die Brüche, deren Zehler 1 ist, als solche, die den Grund der übrigen enthalten, weil man leicht begreift was $\frac{3}{4}$ sind, wann man weis was $\frac{1}{4}$ ist, so sind dergleichen Brüche folgende $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{11}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{13}$ u. s. f. Hierbey ist zu mercken, daß diese Brüche immer kleiner werden; dann in je mehr Theile ein Gantzes zerschnitten wird, desto kleiner werden auch die Theile, also ist $\frac{1}{100}$ kleiner als

$\frac{1}{10}$

$\frac{1}{10}$; und $\frac{1}{1000}$ kleiner als $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{10000}$ kleiner als $\frac{1}{1000}$ und $\frac{1}{100000}$ kleiner als $\frac{1}{10000}$

79.

Hieraus sieht man nun, daß je mehr bey solchen Brüchen der Nenner vergrößert werde, die Bedeutung derselben um so viel kleiner werden müße. Hiebey entsteht nun die Frage, ob der Nenner nicht so groß angenommen werden könne, daß der Bruch gäntzlich verschwinde und zu nichts werde? Dieses aber wird mit recht verneint, dann in so viel gleiche Theile man auch immer Eins, z. E. die Länge eines Fußes, zertheilen mag, so behalten die Theile doch noch immer eine gewiße Größe und sind folglich nicht nichts.

80.

Es ist zwar wahr, daß wann man die Länge eines Fußes in mehr als 1000 gleiche Theile zertheilt, die Theile fast nicht mehr in die Augen fallen. So bald man sie aber durch ein gut Mikroscopium betrachtet, so erscheinen dieselben so groß, daß sie leicht von neuem in 100 und noch mehrere Theilichen könnten zertheilt werden.

Hier ist aber die Rede keinesweges was wir verrichten können, oder von dem was würcklich kan ver-

verrichtet werden, und was noch in die Augen fällt, sondern vielmehr von demjenigen was an sich möglich ist. Und da ist allerdings gewis, daß so groß auch immer der Nenner angenommen werden mag, der Bruch gleichwohl nicht gänzlich verschwinde, oder in nichts, oder o, verwandelt werde.

81.

Weil man nun, so sehr auch der Nenner vermehret würde, niemals gäntzlich zu nichts kommt, sondern diese Brüche noch immrr einige Größe behalten, und also die obengesetzte Reihe der Brüche immer weiter ohne End fortgesetzt werden kann, so pflegt man zu sagen, daß der Nenner unendlich groß seyn müßte, wann endlich der Bruch zu o oder nichts werden sollte. Dann das Wort **unendlich** will hier eben so viel sagen als daß man mit dem gemeldeten Bruche niemals zu Ende komme.

82.

Um nun diesen Begriff, welcher allerdings festgegründet ist, vorzustellen, so bedienet man sich dazu dieses Zeichens ∞, welches eine unendlich große Zahl andeutet: und daher kann man sagen, daß

dieser

dieser Bruch $\frac{1}{\infty}$ ein würckliches nichts sey, eben deswegen, weil ein solcher Bruch niemahlen Nichts werden kan, so lange der Nenner noch nicht ins unendliche vermehret worden.

83.

Dieser Begriff von dem unendlichen ist desto sorgfältiger zu bemercken, weil derselbe aus den ersten Gründen unserer Erkäntniß ist hergeleitet worden, und in dem folgenden von der grösten Wichtigkeit seyn wird. Es laßen sich schon hier daraus schöne Folgen ziehen, welche unsere Aufmercksamkeit verdienen, da dieser Bruch $\frac{1}{\infty}$ den Quotus anzeigt, wann man das Dividend 1 durch den Divisor ∞ dividiret. Nun wißen wir schon, daß wann man das Dividend 1 durch den Quotus, welcher ist $\frac{1}{\infty}$ oder 0 wie wir gesehen haben, dividiret, alsdann der Divisor nemlich ∞ heraus komme; daher erhalten wir einen neuen Begriff von dem Unendlichen, nemlich daß dasselbe herauskomme wann man 1 durch 0, dividiret; folglich kan man mit Grund sagen, daß 1 durch 0 dividiret eine unendlich große Zahl oder ∞ anzeige.

84.

84.

Hier ist nöthig noch einen ziemlich gemeinen Irrthum aus dem Weg zu räumen, indem viele behaupten, ein unendlich großes könne weiter nicht vermehret werden. Dieses aber kan mit obigen richtigen Gründen nicht bestehen.

Dann da $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl andeutet, und $\frac{2}{0}$ ohnstreitig zweymal so groß ist; so ist klar, daß auch so gar eine unendlich große Zahl noch 2 mal größer werden könne.

Capitel 8.

Von den Eigenschafften der Brüche.

85.

Wie wir oben gesehen haben, daß jede dieser Brüche,

$\frac{2}{2}$ / $\frac{3}{3}$ / $\frac{4}{4}$ / $\frac{5}{5}$ / $\frac{6}{6}$ / $\frac{7}{7}$ / $\frac{8}{8}$ / und so fort,

ein Gantzes ausmache und folglich alle unter einander gleich sind; so sind auch folgende Brüche,

$\frac{2}{1}$ /

$\frac{2}{1}$ / $\frac{4}{2}$ / $\frac{6}{3}$ / $\frac{8}{4}$ / $\frac{10}{5}$ / $\frac{12}{6}$ / u. s. f.

einander gleich, weil ein jeder derselben zwey gantze ausmacht: dann es giebt der Zehler eines jeglichen, durch seinen Nenner dividirt 2. Eben so sind alle diese Brüche,

$\frac{3}{1}$ / $\frac{6}{2}$ / $\frac{9}{3}$ / $\frac{12}{4}$ / $\frac{15}{5}$ / $\frac{18}{6}$ / u. s. f.

einander gleich, weil der Werth eines jeglichen 3 beträgt.

86.

Gleicher Gestalt läßt sich auch der Werth eines jeglichen Bruchs auf unendlich vielerley Arten vorstellen. Denn wann man so wohl den Zehler als den Nenner eines Bruchs mit eben derselben Zahl, so nach Belieben genommen werden kan, multipliciret, so behält der Bruch immer eben denselben Werth. Also sind alle diese Brüche,

$\frac{1}{2}$ / $\frac{2}{4}$ / $\frac{3}{6}$ / $\frac{5}{10}$ / $\frac{6}{12}$ / $\frac{7}{14}$ / $\frac{8}{16}$ / $\frac{9}{18}$ / $\frac{10}{20}$ / u. s. f.

einander gleich, und ein jeder so viel als $\frac{1}{2}$. Eben so sind auch alle diese Brüche,

$\frac{1}{3}$ / $\frac{2}{6}$ / $\frac{3}{9}$ / $\frac{4}{12}$ / $\frac{5}{15}$ / $\frac{6}{18}$ / $\frac{7}{21}$ / $\frac{8}{24}$ / $\frac{9}{27}$ / $\frac{10}{30}$ / u. s. f.

einander gleich, und ein jeder so viel als $\frac{1}{3}$. Ferner auch diese,

$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}, \frac{14}{21}, \frac{16}{24}$, u. s. f.

einander gleich; weswegen auf eine allgemeine Art dieser Bruch $\frac{a}{b}$ auf folgende Arten kann vorgestellt werden,

$\frac{a}{b}, \frac{2a}{2b}, \frac{3a}{3b}, \frac{4a}{4b}, \frac{5a}{5b}, \frac{6a}{6b}$ und so ferner, davon ein jeder so groß ist, als der erste $\frac{a}{b}$.

87.

Um dieses zu beweisen, darf man nur für den Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$ einen besondern Buchstaben, als c, schreiben, dergestalt daß c der Quotus sey, wann man a durch b dividirt. Nun aber ist gezeigt worden, daß wann man den Quotus c mit dem Divisor b multiplicirt das Dividend heraus kommen müße.

Da nun c mit b multiplicirt a giebt, so wird c mit 2b multiplicirt 2a geben, und c mit 3b multiplicirt wird 3a geben; und also überhaupt c mit m b multiplicirt muß m a geben.

Macht man hieraus wieder ein Divisions-Exempel und dividirt das Product m a durch den einen Factor m b, so muß der Quotus dem andern Factor c gleich seyn: nun aber giebt m a durch m b dividirt den Bruch $\frac{ma}{mb}$, deßen Werth folglich c ist. Weil

aber c dem Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$ gleich ist, so ist offenbar, daß der Bruch $\frac{ma}{mb}$ dem Bruch $\frac{a}{b}$ gleich sey, man mag statt m eine Zahl annehmen, was man für eine will.

88.

Da nun ein jeglicher Bruch durch unendlich viele Formen kan vorgestellt werden, von welchen eine jede eben denselben Werth enthält, so ist ohnstreitig, daß derjenige am leichtesten zu begreiffen sey, welcher aus den kleinsten Zahlen besteht; als da anstatt $\frac{2}{3}$ ein jeder von folgenden Brüchen, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{18}$, und so fort nach Willkühr gesetzt werden könnte, so wird wohl niemand zweiffeln, daß nicht die Form $\frac{2}{3}$ dennoch am leichtesten unter allen zu begreiffen sey. Hierbey kommt nun diese Frage vor, wie man einen Bruch, der nicht in seine kleinsten Zahlen ausgedruckt ist, als z. E. $\frac{8}{12}$, in seine kleinste Form, nemlich in $\frac{2}{3}$, bringen könne.

89.

Diese Frage wird leicht aufzulösen seyn, wann man bedencket, daß ein jeder Bruch seinen Werth behalte, wenn so wohl sein Zehler als Nenner mit einerlei Zahl multiplicirt wird. Denn daher er-

erfolgt, daß wann man auch den Zehler und Nenner eines Bruchs durch eben dieselbe Zahl dividiret, der Bruch immer eben denselben Werth behalte. Dieses wird noch leichter aus der allgemeinen Form $\frac{na}{nb}$ ersehen. Dann wann man so wohl den Zehler na als den Nenner nb durch die Zahl n dividiret, so kommt der Bruch $\frac{a}{b}$ heraus, welcher jenem gleich ist, wie schon oben gezeigt worden.

90.

Um nun einen vorgegebenen Bruch in seine kleinste Form zu bringen, so muß man solche Zahlen finden können, wodurch sich so wohl der Zehler, als der Nenner theilen läßt. Eine solche Zahl nun wird ein **gemeiner Theiler** genennt, und so lang man zwischen dem Zehler und Nenner einen gemeinen Theiler anzeigen kan, so lang läßt sich der Bruch in eine kleinere Form bringen; wann aber kein gemeiner Theiler außer 1 weiter statt findet, so ist der Bruch schon in seine kleinste Form gebracht.

91.

Um dieses zu erläutern wollen wir den Bruch $\frac{48}{180}$ betrachten. Hier sieht man so gleich, daß sich

Zehler und Nenner durch 2 theilen laßen, als woraus der Bruch $\frac{24}{60}$ entsteht. Diese beyde laßen sich nun noch einmahl durch 2 theilen und giebt die Theilung folgenden Bruch $\frac{12}{30}$, wo 2 abermahlen ein gemeiner Theiler ist und $\frac{6}{15}$ herauskommen. Hier ist aber klar, daß sich der Zehler und Nenner noch durch 3 theilen laße, woraus der Bruch $\frac{2}{5}$ entspringt, welcher dem vorgegebenen gleich ist, und sich in der kleinsten Form befindet, weil die Zahlen 2 und 5 weiter keinen gemeinen Theiler haben außer 1, wodurch aber die Zahlen nicht kleiner werden.

92.

Diese Eigenschaft der Brüche, daß wann man so wohl den Zehler als Nenner mit eben der Zahl entweder multiplicirt oder dividiret, der Werth des Bruchs ohnverändert bleibe, ist von der größten Wichtigkeit und wird gemeiniglich darauf die gantze Lehre von den Brüchen gegründet. Es laßen sich Z. E. zwey Brüche nicht wohl zusammen addiren, oder von einander subtrahiren, ehe man nicht dieselben in andere Formen gebracht, deren Nenner einander gleich sind; wovon im folgenden Capitel gehandelt werden soll.

93.

Hier wollen wir nur noch bemercken, daß auch alle gantze Zahlen in Form eines Bruchs vorgestellt wer-

werden können. Also ist zum Exempel 6 so viel als $\frac{6}{1}$ weil, 6 durch 1 dividirt auch 6 giebt. Und daher entstehen noch diese Formen,

$\frac{12}{2}$ / $\frac{18}{3}$ / $\frac{24}{4}$ / $\frac{36}{6}$ / u. s. f.

welche alle eben denselben Werth, nemlich 6, in sich haben.

Capitel 9.

Von der Addition und Subtraction der Brüche.

94.

Wann die Brüche gleiche Nenner haben, so hat es keine Schwierigkeit dieselben zu addiren und zu subtrahiren, indem $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ so viel als $\frac{5}{7}$ und $\frac{4}{7} - \frac{2}{7}$ so viel als $\frac{2}{7}$ ist. In diesem Fall verichtet man die Addition und Subtraction bloß allein an den Zehlern, und schreibt den gemeinen Nenner darunter. Also macht

$\frac{7}{100} + \frac{9}{100} - \frac{12}{100} - \frac{15}{100} + \frac{20}{100}$ so viel als $\frac{9}{100}$:
$\frac{24}{50} - \frac{7}{50} - \frac{12}{50} + \frac{31}{50}$ ist so viel als $\frac{36}{50}$ oder $\frac{18}{25}$:
$\frac{16}{20} - \frac{3}{20} - \frac{11}{20} + \frac{14}{20}$ ist so viel als $\frac{16}{20}$ oder $\frac{4}{5}$:
eben so auch $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ macht $\frac{3}{3}$ oder 1, das ist ein ganzes, und $\frac{2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ macht $\frac{0}{4}$ das ist nichts, oder 0.

95.

Wann aber die Brüche nicht gleiche Nenner haben, so ist es allezeit möglich dieselben in andere von gleichem Werth zu verwandeln, deren Nenner gleich sind. Also wenn diese Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ gegeben sind und zusammen addirt werden sollen, so ist zu erwegen daß $\frac{1}{2}$ so viel ist als $\frac{3}{6}$ und $\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{2}{6}$: wir haben also anstatt der vorigen diese Brüche $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$ welche geben $\frac{5}{6}$. Ferner $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ist wie das obige, nur daß das Zeichen minus darzwischen steht, also $\frac{3}{6} - \frac{2}{6}$ giebt $\frac{1}{6}$. Es seyen ferner gegeben diese Brüche $\frac{3}{4} + \frac{5}{8}$. Weil hier $\frac{3}{4}$ so viel ist als $\frac{6}{8}$, so setzen wir an derselben Stelle $\frac{6}{8}$, und $\frac{5}{8} + \frac{6}{8}$ giebt $\frac{11}{8}$ oder $1\frac{3}{8}$. Wann man fragt wie viel $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ zusammen ausmachen, so schreibe man statt derselben nur $\frac{4}{12}$ und $\frac{3}{12}$ so kommt $\frac{7}{12}$.

96.

Wann mehr als zwey Brüche gegeben sind, als: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$, welche zu gleichen Nennern gebracht wer-

den

den sollen, so kommt alles darauf an, daß man eine Zahl finde, welche sich durch alle diese Nenner theilen laße. Eine solche ist nun 60, welche den gemeinen Nenner abgiebt. Also werden wir haben anstatt $\frac{1}{2}$ diesen $\frac{30}{60}$, anstatt $\frac{2}{3}$ diesen $\frac{40}{60}$, anstatt $\frac{3}{4}$ diesen $\frac{45}{60}$, anstatt $\frac{4}{5}$ diesen $\frac{48}{60}$, anstatt $\frac{5}{6}$ diesen $\frac{50}{60}$. Sollen nun diese Brüche $\frac{30}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, $\frac{50}{60}$, zusammen addirt werden so machen die Zehler derselben zusammen $\frac{213}{60}$, oder 3 gantze und $\frac{33}{60}$, oder $3\ \frac{11}{20}$.

97.

Es kommt hier alles darauf an, daß man zwey Brüche von ungleichen Nennern in andere verwandele, deren Nenner einander gleich sind. Um dieses auf eine allgemeine Art zu verrichten, so seyen die vorgegebene Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. Nun multiplicire man den ersten Bruch oben und unten mit d, so bekommt man $\frac{ad}{bd}$, welcher Bruch so groß ist als $\frac{a}{b}$; Den andern Bruch multiplicire man wie den ersten oben und unten mit b, so bekommt man anstatt desselben $\frac{bc}{bd}$, und sind also die Nenner jetzt gleich; die Summa aber derselben ist $\frac{ad+bc}{bd}$ und ihre Differenz ist $\frac{ad-bc}{bd}$. Wann also diese Brüche vorgelegt sind, $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{9}$, so bekommt man anstatt derselben $\frac{45}{72}$ und $\frac{56}{72}$, deren Summa $\frac{101}{72}$, die Differenz aber $\frac{11}{72}$ macht.

98.

Hier pflegt auch die Frage vorzukommen, welcher von zwey gegebenen Brüchen größer, oder kleiner sey als der andere? Z. E. welcher von diesen zwey Brüchen $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{7}$ ist der größere? Zu diesem Ende darf man nur die beyden Brüche zu gleichen Nennern bringen, und da bekommt man für den erstern $\frac{14}{21}$ und für den andern $\frac{15}{21}$, woraus offenbar ist, daß $\frac{5}{7}$ größer ist als $\frac{2}{7}$, und zwar um $\frac{1}{21}$. Wann ferner diese zwey Brüche gegeben sind $\frac{3}{5}$ und $\frac{5}{8}$, so bekommt man statt deren die Brüche $\frac{24}{40}$ und $\frac{25}{40}$, woraus erhellet daß $\frac{5}{8}$ mehr sey als $\frac{3}{5}$, aber nur um $\frac{1}{40}$.

99.

Wann ein Bruch von einer gantzen Zahl abgezogen werden soll, als $\frac{2}{3}$ von 1, so darf man nur $\frac{3}{3}$ anstatt 1 schreiben, da man dann so gleich sieht, daß $\frac{1}{3}$ übrig bleibt. Eben so $\frac{5}{12}$ von 1 abgezogen, bleibt $\frac{7}{12}$. Soll man aber $\frac{3}{4}$ von 2 abziehen, so schreibe man für 2 nur 1 und $\frac{4}{4}$, da dann 1 und $\frac{1}{4}$ übrig bleibt. Übrigens ist bekannt, daß wann ein Bruch zu einer gantzen Zahl addirt werden soll, man denselben nur schlechthin davor schreibe; als, $\frac{2}{3}$ zu 6 addirt, giebt $6\frac{2}{3}$.

100.

Bisweilen geschieht es auch, daß 2 oder mehr Brüche zusammen addirt, mehr als ein Gantzes aus-

ma-

machen, welches sodann bemerckt werden muß: als $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$, oder $\frac{8}{12} + \frac{9}{12}$ giebt $\frac{17}{12}$, welches so viel ist als $1\frac{5}{12}$. Eben so wann mehrere gantze Zahlen und Brüche addirt werden sollen, so addirt man erst die Brüche und wann ihre Summa 1 oder mehr gantze enthält, so werden dieselben hernach mit den gantzen Zahlen addirt z. E. es wäre $3\frac{1}{2}$ und $2\frac{2}{3}$ zu addiren; so machen erstlich die Brüche $\frac{3}{6}$ und $\frac{4}{6}$ zusammen $\frac{7}{6}$, oder $1\frac{1}{6}$, welches mit den Gantzen 6 und $\frac{1}{6}$ ausmacht.

Capitel 10.

Von der Multiplication und Division.

101.

Wann ein Bruch mit einer gantzen Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicirt man damit nur den Zehler, und läßt den Nenner ohnverändert; also

2 mal $\frac{1}{2}$ macht $\frac{2}{2}$, oder 1 Gantzes

2 mal $\frac{1}{3}$ macht $\frac{2}{3}$; ferner 3 mal $\frac{1}{6}$ macht $\frac{3}{6}$, oder $\frac{1}{2}$;

4 mal $\frac{5}{12}$ macht $\frac{20}{12}$, oder 1 und $\frac{8}{12}$, oder $1\frac{2}{3}$

Man

Man schließt hieraus die Regel, daß ein Bruch mit einer gantzen Zahl multiplicirt wird, wann man entweder den Zehler damit multiplicirt oder auch den Nenner durch die ganze Zahl dividirt, welches letztere, wann es angeht, die Rechnung abkürtzt. Z. E. es soll $\frac{8}{9}$ mit 3 multiplicirt werden, so kommt wenn der Zehler mit der ganzen Zahl multiplicirt wird $\frac{24}{9}$ heraus, welches so viel ist als $\frac{8}{3}$; laße ich aber den Zehler unverändert und dividire den Nenner 9 durch 3, so bekomme ich auch $\frac{8}{3}$; das ist 2 und $\frac{2}{3}$. Eben so $\frac{13}{24}$ mit 6 multiplicirt giebt $\frac{13}{4}$ oder $3\frac{1}{4}$.

102.

Uberhaupt also, wann ein Bruch $\frac{a}{b}$ durch c multiplicirt werden soll, so bekommt man $\frac{ac}{b}$. Hierbey ist zu mercken, daß wann die gantze Zahl just dem Nenner gleich ist, alsdann das Product dem Zehler gleich werde, also:

$\frac{1}{2}$ zweymal genommen giebt 1.
$\frac{2}{3}$ mit 3 mult. giebt 2.
$\frac{3}{4}$ mit 4 mult. giebt 3.

und allgemein, wann der Bruch $\frac{a}{b}$ mit der Zahl b, multiplicirt wird, so ist das Product a, wovon der Grund schon oben gezeigt worden; dann da $\frac{a}{b}$ den Quotus aus-

ausdruckt, wann das Dividend a durch den Divisor b dividirt wird, und zugleich bewiesen worden, daß der Quotus mit dem Divisor multiplicirt das Dividend geben müße, so ist klar daß $\frac{a}{b}$ mit b multiplicirt die Zahl a geben müße.

103.

Da wir nun gezeigt haben, wie man einen Bruch mit einer gantzen Zahl multiplicire; so müßen wir auch sehen, wie ein Bruch durch eine gantze Zahl zu dividiren sey, ehe wir die Multiplication eines Bruchs mit einem Bruch lehren können. Es ist aber klar, daß wann ich den Bruch $\frac{2}{3}$ durch 2 dividiren soll $\frac{1}{3}$ herauskomme, eben so wie in dem Fall, da $\frac{6}{7}$ durch 3 getheilt werden sollen, $\frac{2}{7}$ herauskommen. Hieraus erhellet, daß man nur den Zehler durch die ganze Zahl theilen müße, da dann der Nenner ohnverändert bleibt. Also:

$\frac{12}{25}$ durch 2, div: giebt $\frac{6}{25}$ und
$\frac{12}{25}$ durch 3, div: giebt $\frac{4}{25}$ und
$\frac{12}{25}$ durch 4, div: giebt $\frac{3}{25}$ und so fort.

104.

Die Sache hat also keine Schwierigkeit, wann sich nur der Zehler durch die vorgegebene Zahl theilen

läßt

läßt: wann aber dieses nicht angeht, so ist zu bemercken, daß man den Bruch in unendlich viele andere Formen verändern könne, unter welchen sich gewiß solche finden müßen, deren Zehler sich durch die gegebene Zahl theilen laße. Also wann $\frac{3}{4}$ durch 2 getheilt werden soll, so verwandele man diesen Bruch in $\frac{6}{8}$, so giebt es, wann es durch 2 dividirt wird $\frac{3}{8}$.

Auf eine allgemeine Art, wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ durch c dividirt werden soll, so verwandele man denselben, in diesen $\frac{a\,c}{b\,c}$, deßen Zehler a c durch c dividirt a giebt, also ist der gesuchte Quotient $\frac{a}{b\,c}$.

105.

Hieraus ersehen wir, daß wann ein Bruch, als $\frac{a}{b}$, durch eine gantze Zahl c dividiret werden soll, man nur nöthig habe den Nenner b mit dieser gantzen Zahl zu multiplicirn und den Zehler ohn verändert zu laßen. Also, $\frac{5}{8}$ durch 3 dividiret giebt $\frac{5}{24}$, und $\frac{9}{10}$ durch 5 dividirt giebt $\frac{9}{85}$. Wann sich aber der Zehler selbst durch eine ganze Zahl theilen läßt, so wird die Rechnung leichter. Als, $\frac{9}{16}$ durch 3 getheilet, giebt $\frac{3}{16}$. Nach jener Art aber $\frac{9}{48}$. Doch ist dieser Bruch so viel als jener $\frac{3}{16}$. Denn 3 mahl 3 ist 9, und 3 mahl 16 ist 48.

106

106.

Nun sind wir im Stande zu zeigen, wie ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit einem andern Bruch $\frac{c}{d}$ multiplicirt werden soll. Man darf nur bedencken, daß $\frac{c}{d}$ so viel ist als c getheilt durch d: und also hat man nur nöthig den Bruch $\frac{a}{b}$ erstlich mit c zu multipliciren, da denn $\frac{ac}{b}$ heraus-kommt; hernach durch d zu dividiren, da es denn $\frac{ac}{bd}$ giebt: und hieraus entspringt diese Regul, daß um zwey Brüche mit einander zu multipliciren man nur nöthig habe erstlich die Zehler, und hernach auch die Nenner besonders mit einander zu multipliciren

Also: $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$ mult. giebt $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$: ferner
$\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{5}$ mult. giebt $\frac{8}{15}$; und
$\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{12}$ mult. giebt $\frac{15}{48}$ oder $\frac{5}{16}$ u. s. f.

107.

Nun ist noch übrig zu zeigen, wie ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt werden soll; wobey erstlich zu mercken, daß wann die Brüche gleiche Nenner haben, die Division nur in den Zehlern verrichtet werde: weil z. E. $\frac{3}{12}$ in $\frac{9}{12}$ eben so viel mal enthalten ist, als 3 in 9, das 3 ist mal. Dahero wann $\frac{8}{12}$ durch $\frac{9}{12}$ dividirt werden soll, so darf man nur 8 durch 9 dividiren, das giebt $\frac{8}{9}$ Ferner $\frac{6}{20}$ in $\frac{18}{20}$ ist 3 mal: $\frac{7}{100}$ in $\frac{49}{100}$ ist 7 mal: $\frac{6}{25}$ durch $\frac{7}{25}$ giebt $\frac{6}{7}$: eben so $\frac{3}{7}$ durch $\frac{4}{7}$ giebt $\frac{3}{4}$.

108.

Wann aber die Brüche nicht gleiche Nenner haben, so weis man wie dieselben auf gleiche Nenner zu bringen sind. Z. E. man soll den Bruch $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ dividiren, so bringe man erstlich diese Brüche auf gleiche Nenner, und da bekommt man den Bruch $\frac{ad}{bd}$ durch $\frac{bc}{bd}$ zu dividiren, wo dann eben so viel heraus kommen muß, als wann man den ersten Zehler ad durch den letztern bc dividiret: Folglich wird der gesuchte Quotus seyn $\frac{ad}{bc}$.

Hieraus entspringt diese Regul: man muß den Zehler des Dividends mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividends mit dem Zehler des Divisors multipliciren, so wird jenes Product den Zehler, und dieses den Nenner zum Quotient geben.

109.

Wann also $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividiret werden soll, so bekommt man nach dieser Regul $\frac{15}{16}$ zum Quotient: Wann ferner $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\frac{6}{4}$ oder $\frac{3}{2}$, das ist 1 und $\frac{1}{2}$. Ferner wann durch $\frac{5}{6}$ der Bruch $\frac{25}{48}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$.

IIO.

Mann pflegt diese Regul für die Division auf eine bequemere Art folgender Gestalt vorzutragen. Man kehrt den Bruch, durch welchen dividirt werden soll um, indem man seinen Nenner oben, und seinen Zehler unten schreibt, und multiplicirt den Bruch, welcher getheilt werden soll, mit diesen umgekehrten Bruch, so erhält man den gesuchten Quotient. Also $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt, ist eben so viel als $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{1}$ multiplicirt, woraus kommt $\frac{6}{4}$ oder $1\frac{1}{2}$. Eben so $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt ist eben so viel als $\frac{5}{8}$ mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt, woraus kommt $\frac{15}{16}$: ferner $\frac{25}{48}$ durch $\frac{5}{6}$ dividirt, giebt eben so viel als $\frac{25}{48}$ mit $\frac{6}{5}$ multiplicirt, da denn $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$ entsteht.

Man sieht also überhaupt, daß durch den Bruch $\frac{1}{2}$ dividirt eben so viel ist, als mit $\frac{2}{1}$ das ist mit 2 multiplicirt: und durch $\frac{1}{3}$ dividirt ist eben so viel als mit $\frac{3}{1}$, das ist mit 3 multiplicirt.

III.

Wann dahero die Zahl 100 durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so giebt es 200; und 1000 durch $\frac{1}{3}$ dividirt giebt 3000. Wann ferner 1 durch $\frac{1}{1000}$ dividirt werden soll, so kommt 1000; und 1 durch $\frac{1}{100000}$ dividirt,

giebt 100000; woraus man begreiffen kann, daß eine Division, die durch 0 geschiehet, unendlich viel geben müße, weil wann man 1 durch diesen kleinen Bruch $\frac{1}{100000}$ dividiret, die große Zahl 100000000 herauskommt.

112.

Wann ein Bruch durch sich selbsten dividiret werden soll, so versteht sich von selbsten, daß der Quotus 1 seyn werde, weil eine jede Zahl durch sich selbst dividirt 1 giebt: eben dieses weißt auch unsere Regul: als wann Z. E. $\frac{3}{4}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden soll, so multiplicirt man $\frac{3}{4}$ mit $\frac{4}{3}$ da dann kommt $\frac{12}{12}$, das ist 1. Und wann $\frac{a}{b}$ durch $\frac{a}{b}$ dividirt werden soll, so multiplicirt man $\frac{a}{b}$ mit $\frac{b}{a}$ da dann $\frac{ab}{ab}$ das ist 1 herauskommt.

113.

Es ist noch übrig eine Redens-Art zu erklären, welche öfters gebraucht wird: Z. E. man frägt was die Hälfte von $\frac{3}{4}$ sey, so will das so viel sagen, als man soll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{1}{2}$ multipliciren. Eben so wann man frägt, was $\frac{2}{3}$ von $\frac{5}{8}$ sey, so muß man $\frac{5}{8}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciren, da dann kommt $\frac{10}{24}$; und $\frac{3}{4}$ von $\frac{9}{16}$ ist eben so viel als $\frac{9}{16}$ mit

$\frac{9}{16}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt und beträgt $\frac{27}{64}$. Welches wohl zu mercken, so oft diese Redens-Art vorkommt.

114.

Endlich ist hier wegen der Zeichen + und − eben das zu bemercken, was oben bey den gantzen Zahlen gesagt worden. Also: + $\frac{1}{2}$ mit − $\frac{1}{3}$ multiplicirt, giebt − $\frac{1}{6}$; und − $\frac{2}{3}$ mit − $\frac{4}{5}$ multiplicirt, giebt + $\frac{8}{15}$. Ferner − $\frac{5}{8}$ durch + $\frac{2}{3}$ dividirt, giebt − $\frac{15}{16}$; und − $\frac{3}{4}$ durch − $\frac{3}{4}$, giebt + $\frac{12}{12}$ oder + 1.

Capitel II.

Von den Quadrat-Zahlen.

115.

Wann eine Zahl mit sich selbsten multiplicirt wird, so wird das Product ein **Quadrat** genennet, so wie in Ansehung deßen die Zahl, daraus es entstanden, seine **Quadrat-Wurtzel** genennt wird.

Also wann man z. E. 12 mit 12 multiplicirt, so ist das Product 144 eine Quadrat-Zahl, deren Wurzel die Zahl 12 ist.

Der Grund dieser Benennung ist aus der Geometrie genommen, wo der Inhalt eines Quadrats gefunden wird, wann man die Seite deßelben mit sich selbsten multipliciret.

116.

Daher werden alle Quadrat-Zahlen durch die Multiplication gefunden, wann man nehmlich die Wurtzel mit sich selbsten multipliciret.

Also weil 1 mit 1 multiplicirt 1 giebt, so ist 1 das Quadrat von 1.

Ferner ist 4 das Quadrat von der Zahl 2; und 2 ist hingegen die Quadrat-Wurtzel von 4.

Eben so ist 9 das Quadrat von 3, und 3 die Quadrat-Wurtzel von 9. Wir wollen demnach die Quadraten der natürlichen Zahlen betrachten, und folgende Tafel hersetzen, in welcher die Zahlen oder Wurtzeln in der ersten, die Quadraten aber in der andern Reihe vorgestelt werden.

Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Quad:	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289

117.

Bey dieser der Ordnung nach fortschreitenden Quadrat-Zahlen bemercken wir sogleich eine schöne Eigenschaft, welche darinnen besteht, daß wann man eine jede von der folgenden subtrahiret, die Reste in folgender Ordung fortgehen.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, etc.

welche immer um zwey steigen, und alle ungerade Zahlen der Ord-nung nach vorstellen.

118.

Auf gleiche Weise werden die Quadraten von Brüchen gefunden, wann man nemlich einen Bruch mit sich selbsten multiplicirt. Also ist von $\frac{1}{2}$ das Quadrat $\frac{1}{4}$

von $\frac{1}{3}$ ist das Quadrat $\frac{1}{9}$
von $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{9}$
von $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{16}$
von $\frac{3}{4}$ $\frac{9}{16}$ und so ferner.

Man darf nemlich nur das Quadrat des Zehlers durch das Quadrat des Nenners dividiren, so be-

kommt man das Quadrat des Bruchs. Also ist $\frac{25}{64}$ das Quadrat des Bruchs $\frac{5}{8}$ und umgekehrt ist $\frac{5}{8}$ die Wurtzel von $\frac{25}{64}$.

119.

Wann man das Quadrat von einer vermischten Zahl, welche aus einer gantzen Zahl und einem Bruch besteht, finden will, so darf man nur dieselbe in einem einzelnen Bruch bringen, und das Quadrat davon nehmen. Also um das Quadrat von $2\frac{1}{2}$ zu finden, so ist erstlich $2\frac{1}{2}$ so viel als $\frac{5}{2}$, und folglich das Quadrat $\frac{25}{4}$ welches beträgt $6\frac{1}{4}$. Also ist $6\frac{1}{4}$ das Quadrat von $2\frac{1}{2}$. Eben so um das Quadrat von $3\frac{1}{4}$ zu finden, so bemerke man daß $3\frac{1}{4}$ so viel ist als $\frac{13}{4}$, wovon das Quadrat $\frac{169}{16}$ ist, welches 10 und $\frac{9}{16}$ ausmacht. Wir wollen Z. E. die Quadraten welche von 3 bis 4 um ein Viertel steigen betrachten, als:

Zahlen	3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4
Quad:	9	$10\frac{9}{16}$	$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{16}$	16

Woraus mann leicht abnehmen kann, daß wann die Wurzel einen Bruch enthält, das Quadrat derselben auch immer einen Bruch enthalte. Also wann die Wurzel ist $1\frac{5}{12}$, so wird das Quadrat derselben gefunden

funden $\frac{289}{144}$, welches ist $2\ \frac{1}{144}$, und also nur um sehr wenig größer als 2.

120.

Auf eine allgemeine Art, wann die Wurzel a ist, so ist das Quadrat a a: ferner von der Wurzel 2a ist das Quadrat 4 a a. Hieraus sieht man, daß wann die Wurzel 2 mal so groß genommen wird, das Quadrat 4 mal größer werde. Ferner ist von der Wurzel 3 a das Quadrat 9 a a, und von der Wurzel 4 a ist das Quadrat 16 a a und so weiter. Heißt aber die Wurzel a b, so ist ihr Quadrat a a b b, und wann abc die Wurzel ist, so ist ihr Quadrat aa bb cc.

121.

Wann daher die Wurzel aus 2 oder mehrern Factoren besteht, so muß man die Quadrate derselben mit einander multipliciren, und umgekehrt, wann das Quadrat aus 2 oder mehrern Factoren besteht, deren jeder ein Quadrat ist, so braucht man nur die Wurzel derselben mit einander zu multipliciren. Also da 2304 so viel ist, als 4. 16. 36; so ist die Quadrat Wurzel davon 2. 4. 6, das ist 48, und in der That ist 48 die Quadrat-Wurzel von 2304, weil 48. 48 eben so viel ausmacht, als 2304.

122.

Nun wollen wir auch die Zeichen plus und minus erwegen, was es mit denselben bey den Quadraten für eine Bewantniß habe. Es erhellet sogleich daß wann die Wurzel das Zeichen + hat, oder eine Positiv-Zahl ist, dergleichen wir bisher angenommen haben, das Quadrat derselben auch eine Positiv-Zahl seyn müße, weil + mit + multiplicirt + giebt. Also wird das Quadrat von + a seyn + a a. Wann aber die Wurzel eine Negativ-Zahl ist, als — a, so wird ihr Quadrat seyn + aa, eben so als wann die Wurzel + a wäre; folglich ist + aa eben so wohl das Quadrat von + a als von — a; und können dahero von einem jeden Quadrat zwey Quadrat-Wurzeln angegeben werden, deren eine Positiv, die andere Negativ ist. Also ist die Quadrat-Wurzel von 25 so wohl + 5, als — 5, weil + 5 mit + 5 multiplicirt, und auch — 5 mit — 5 multiplicirt + 25 giebt.

Capitel

Capitel 12.

Von den Quadrat-Wurzeln und den daher entspringenden Irrational-Zahlen.

123.

Aus dem vorhergehenden erhellet, daß die Quadrat-Wurzel aus einer vorgegebenen Zahl nichts anders ist, als eine solche Zahl, deren Quadrat der vorgegebenen Zahl gleich ist. Also die Quadrat-Wurzel von 4 ist 2, von 9 ist sie 3, von 16 ist sie 4. u. s. w. wobey zu mercken ist, daß diese Wurzeln so wohl mit dem Zeichen plus als minus gesetzt werden können. Also von der Zahl 25, ist die Quadrat-Wurzel so wohl + 5, als − 5, weil − 5 mit − 5 multiplicirt eben so wohl + 25 ausmacht, als + 5 mit + 5 multiplicirt.

124.

Wann dahero die vorgegebene Zahl ein Quadrat ist und man die Quadrat-Zahlen so weit im Gedächtniß hat, so es ist leicht die Quadrat-Wurzel zu finden: als, wann die vorgegebene Zahl 196 wäre

so weiß man, daß die Quadrat-Wurzel davon 14 ist. Mit den Brüchen ist es ebenfalls nicht schwerer, und ist aus dem obigen klar, daß von dem Bruch $\frac{25}{49}$ die Quadrat-Wurzel sey $\frac{5}{7}$, wiel man nur so wohl von dem Zehler, als von dem Nenner die Quadrat-Wurzel nehmen darf. Ist die vorgegebene Zahl eine vermischte Zahl als $12\frac{1}{4}$ so bringe man dieselbe auf einen einzeln Bruch, nemlich $\frac{49}{4}$ wovon die Quadrat-Wurzel offenbar $\frac{7}{2}$ ist, oder $3\frac{1}{2}$, welches also die Quadrat-Wurzel von $12\frac{1}{4}$ ist.

125.

Wann aber die vorgegebene Zahl kein Quadrat ist, als Z. E. 12, so ist auch nicht möglich die Quadrat-Wurzel davon, das ist eine solche Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt just 12 ausmache, zu finden oder anzugeben. Inzwischen aber wißen wir doch, daß die Quadrat-Wurzel von 12 größer ist als 3, weil 3. 3 nur 9 macht, doch aber kleiner als 4, weil 4. 4, schon 16 macht; wir wißen so gar auch, daß dieselbe kleiner seyn müße als $3\frac{1}{2}$, weil das Quadrat von $3\frac{1}{2}$ mehr ist als 12, dann $3\frac{1}{2}$ ist $\frac{7}{2}$ und dessen Quadrat $\frac{49}{4}$ oder $12\frac{1}{4}$ Wir können so gar diese Wurzel noch näher bestimmen durch $3\frac{7}{15}$ dann das Quadrat

von

von $3\frac{7}{15}$ oder $\frac{52}{15}$ macht $\frac{2704}{225}$; folglich ist $3\frac{7}{15}$ noch um etwas zu groß, dann $\frac{2704}{225}$ ist um $\frac{4}{225}$ größer als 12.

126.

Weil nun $3\frac{1}{2}$ und auch $3\frac{7}{15}$ um etwas größer ist als die Quadrat-Wurzel von 12, so möhte man dencken, daß wann man anstatt des Bruchs $\frac{7}{15}$ einen etwas kleinern zu 3 addirte, das Quadrat davon genau 12 werden könnte.

Laßt uns also $3\frac{3}{7}$ nehmen, weil $\frac{3}{7}$ um etwas wenigs kleiner ist als $\frac{7}{15}$. Nun ist $3\frac{3}{7}$ so viel als $\frac{24}{7}$, wovon das Quadrat $\frac{576}{49}$, und also kleiner ist als 12. Dann 12 betragen $\frac{588}{49}$, ist also noch um $\frac{12}{49}$ zu klein. Hieraus sehen wir also, daß $3\frac{3}{7}$ zu klein, $3\frac{7}{15}$ aber zu groß ist. Man könnte also $3\frac{5}{11}$ annehmen, weil $\frac{5}{11}$ größer ist als $\frac{3}{7}$ und doch kleiner als $\frac{7}{15}$. Da nun $3\frac{5}{11}$ in einem Bruch gebracht $\frac{38}{11}$ sind, so ist das Quadrat davon $\frac{1444}{121}$. Aber 12 auf diesen Nenner gebracht giebt $\frac{1452}{121}$, woraus erhellet, daß $3\frac{5}{11}$ noch zu klein ist und das nur um $\frac{8}{121}$. Wollte man nun setzen die Wurzel wäre $3\frac{6}{13}$, weil $\frac{6}{13}$ etwas größer ist als $\frac{5}{11}$, so wäre das Quadrat davon $\frac{2025}{169}$; aber 12 zu diesen Nenner gebracht

bringt

bringt $\frac{2028}{169}$. Also ist $3\frac{6}{13}$ noch zu klein, doch nur um $\frac{3}{169}$, da doch $3\frac{7}{15}$ zu groß ist.

127.

Es läßt sich aber leicht begreiffen, daß was wir auch immer für einen Bruch zu 3 hinzusetzen möchten, das Quadrat davon immer einen Bruch in sich faßen müße, und also niemahls genau 12 betragen könne. Also, ohngeacht wir wißen, daß die Quadrat-Wurzel von 12 größer ist als $3\frac{6}{13}$ doch aber kleiner als $3\frac{7}{15}$, so müßen wir doch bekennen, daß es nicht möglich sey zwischen diesen zwey Brüchen, einen solchen ausfündig zu machen, welcher zu 3 addirt, die Quadrat-Wurzel von 12 genau ausdrückte. Inzwischen kann man doch nicht sagen, daß die Quadrat-Wurzel von 12 an und für sich selbsten unbestimmt wäre, sondern es folgt aus dem angeführten nur so viel, daß dieselbe durch Brüche nicht könne ausgedrückt werden, ohngeachtet sie nothwendig eine bestimmte Größe hat.

128.

Hiedurch werden wir auf eine neue Art von Zahlen geleitet, welche sich keineswegs durch

Brüche

Brüche ausdrücken laßen und gleichwohl eine bestimmte Größe haben, wie wir von der Quadrat-Wurzel aus der Zahl 12 gesehen haben. Diese neue Art von Zahlen werden nun **Irrational-Zahlen** genennt, und solche entspringen, so oft man die Quadrat-Wurzel aus einer Zahl suchen soll, welche kein Quadrat ist. Also weil 2 kein Quadrat ist, so ist auch die Quadrat-Wurzel aus 2, oder diejenige Zahl, welche mit sich selbsten multiplicirt genau 2 hervorbringt, eine Irrational-Zahl. Bisweilen pflegen auch solche Zahlen **Surdische** genennt zu werden.

129.

Ohngeacht sich nun solche Irrational-Zahlen durch keinen Bruch vorstellen laßen, so haben wir doch einen deutlichen Begriff von der Größe derselben. Dann z. E. die Quadrat-Wurzel aus 12 mag auch immer noch so verborgen scheinen, so wißen wir doch daß dieselbe eine solche Zahl ist, welche mit sich selbst multiplicirt just 12 hervorbringt. Und diese Eigenschaft ist hinlänglich, uns einen deutlichen Begriff von dieser Zahl zu geben, insonderheit da wir immer näher zu dem Werth derselben gelangen könen

130.

130.

Weil wir nun einen hinlänglichen Begriff von dergleichen Irrational-Zahlen haben, so bedienet man sich eines gewißen Zeichens, um die Quadrat-Wurzel von solchen Zahlen, welche keine Quadrate sind, anzudeuten. Dieses Zeichen hat nun diese Figur, $\sqrt{}$ und wird mit dem Wort Quadrat-Wurzel ausgesprochen. Also $\sqrt{}12$ deutet diejenige Zahl an, welche mit sich selbsten multiplicirt 12 giebt, oder die Quadrat-Wurzel aus 12. Eben so bedeutet $\sqrt{}2$ die Quadrat-Wurzel aus 2: $\sqrt{}3$ die Quadrat-Wurzel aus 3: ferner $\sqrt{}\frac{2}{3}$ die Quadrat-Wurzel aus $\frac{2}{3}$, und überhaupt $\sqrt{}a$, deutet die Quadrat-Wurzel aus der Zahl a an. So offt man also aus einer Zahl, welche kein Quadrat ist, die Quadrat-Wurzel anzeigen soll, so bedient man sich dieses Zeichens $\sqrt{}$, welches vor dieselbe Zahl geschrieben wird.

131.

Der obgemeldete Begriff von diesen Irrational-Zahlen führt uns sogleich auf einen Weg die gewöhnlichen Rechnungen mit denselben anzustellen. Weil nemlich die Quadrat-Wurzel aus 2 mit sich selbsten multiplicirt 2 geben muß, so wißen wir,

daß

daß wann $\sqrt{2}$ mit $\sqrt{2}$ multiplicirt wird, nothwendig 2 herauskomme: eben so $\sqrt{3}$ mit $\sqrt{3}$ multiplicirt giebt 3; und $\sqrt{5}$ mit $\sqrt{5}$ giebt 5; imgleichen $\sqrt{\frac{2}{3}}$ mit $\sqrt{\frac{2}{3}}$ giebt $\frac{2}{3}$; und überhaupt $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{a}$, multiplicirt giebt a.

132.

Wann aber $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt werden soll, so ist das Product $\sqrt{ab}$, weil wir oben gezeigt haben, daß wann ein Quadrat Factores hat, die Wurzel davon auch aus den Wurzeln der Factores entstehen. Daher findet man die Quadrat-Wurzel aus dem Product ab, das ist $\sqrt{ab}$, wann man die Quadrat-Wurzel von a, das ist $\sqrt{a}$ mit der Quadrat-Wurzel von b, das ist $\sqrt{b}$, multiplicirt. Hieraus erhellet sogleich daß wann b, dem a gleich wäre, alsdenn $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt $\sqrt{aa}$ gäbe. Nun aber ist $\sqrt{aa}$ offenbar a weil aa das Quadrat ist von a.

133.

Eben so, wann $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$, dividiret werden soll, so bekömmt man $\sqrt{\frac{a}{b}}$, wobey es sich zutragen kann, daß im Quotus die Irrationalität verschwinde

schwinde. Also wenn $\sqrt{}$ 18 durch $\sqrt{}$ 8, dividirt werden soll, so bekommt man $\sqrt{}\frac{18}{8}$: Es ist aber $\frac{18}{8}$ so viel als $\frac{9}{4}$ und die Quadrat-Wurzel von $\frac{9}{4}$ ist $\frac{3}{2}$.

134.

Wann die Zahl, vor welche das Wurzel-Zeichen $\sqrt{}$ gesetzt wird, selbst ein Quadrat ist, so läßt sich die Wurzel davon auf die gewöhnliche Art ausdrucken. Also ist $\sqrt{}$ 4 so viel als 2; $\sqrt{}$ 9 ist 3; $\sqrt{}$ 36 ist 6; und $\sqrt{}$ 12 $\frac{1}{4}$ ist $\sqrt{}\frac{49}{4}$: das ist $\frac{7}{2}$ oder $3\frac{1}{2}$. In diesen Fällen ist demnach die Irrationalität nur scheinbar, und fällt von selbsten weg.

135.

Es ist auch leicht solche Irrational-Zahlen mit gewöhnlichen Zahlen zu multipliciren. Also ist 2 mal $\sqrt{}$ 5, so viel als 2 $\sqrt{}$ 5; und $\sqrt{}$ 2 mit 3 multiplicirt giebt 3 $\sqrt{}$ 2; weil aber 3 so viel ist als $\sqrt{}$ 9, so giebt auch $\sqrt{}$ 9 mit $\sqrt{}$ 2 multiplicirt folgende Form, nemlich $\sqrt{}$ 18. Also daß $\sqrt{}$ 18 eben so viel ist als 3 $\sqrt{}$ 2. Eben so ist 2 $\sqrt{}$ a so viel als $\sqrt{}$ 4 a, und 3 $\sqrt{}$ a so viel als $\sqrt{}$ 9 a. Und auf eine allgemeine Art ist b $\sqrt{}$ a so viel als die Quadrat-Wurzel aus bba oder $\sqrt{}$ abb; woraus man sieht,

daß

daß, wann die Zahl, die hinter dem Zeichen steht, ein Quadrat in sich enthält, die Wurzel davon vor das Zeichen gesezt werden kann; als b √ a anstatt √ bba. Diesem nach werden folgende Reductionen klar seyn.

√ 8 , oder √ 2. 4, ist so viel als 2 √ 2.
√ 12 , oder √ 3. 4, — — — 2 √ 3.
√ 18 , oder √ 2. 9, — — — 3 √ 2.
√ 24 , oder √ 6. 4, — — — 2 √ 6.
√ 32 , oder √ 2. 16, — — — 4 √ 2.
√ 75 , oder √ 3. 25, — — — 5 √ 3. und so fort.

136.

Mit der Division hat es eben die Bewantniß: √ a durch √ b dividirt, giebt $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, das ist √ $\frac{a}{b}$. Auf eben diese Weise ist $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ so viel als √ $\frac{8}{2}$, oder √ 4, oder 2.

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ ist √ $\frac{18}{2}$ oder √ 9, oder 3.
$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ ist √ $\frac{12}{3}$, oder √ 4, oder 2.
$\frac{2}{\sqrt{2}}$ ist $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}$, oder √ $\frac{4}{2}$, oder √ 2.
$\frac{3}{\sqrt{3}}$ ist $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$, oder √ $\frac{9}{3}$, oder √ 3.
$\frac{12}{\sqrt{6}}$ ist $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{6}}$, oder √ $\frac{144}{6}$, oder √ 24, oder √ 6. 4, das ist 2 √ 6.

137.

Bey der Addition und Subtraction fält nichts besonders zu bemercken vor, weil die Zahlen nur mit plus und minus verbunden werden. Als: $\sqrt{2}$ zu $\sqrt{3}$ addirt, giebt $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; und $\sqrt{3}$ von $\sqrt{5}$ abgezogen, giebt $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

138.

Endlich ist noch zu mercken, daß, zum Unterschied dieser sogenannten Irrational-Zahlen, die gewöhnlichen Zahlen, so wohl gantze als Brüche, **Rational-Zahlen** genennt zu werden pflegen.

Wann also von Rational-Zahlen die Rede ist, so werden darunter allezeit nur ganze Zahlen, oder auch Brüche verstanden.

Capitel 13.

Von den aus eben dieser Quelle entspringenden ohnmöglichen oder imaginären Zahlen.

139.

Wir haben schon oben gesehen, daß die Quadraten so wohl von den positiven als negativen Zahlen immer positiv sind, oder mit dem Zeichen plus heraus kommen; indem — a mit — a multiplicirt eben so wohl + aa giebt, als wann man + a mit + a multiplicirt. Und dahero haben wir in dem vorigen Capitel alle Zahlen, woraus die Quadrat-Wurzeln gezogen werden sollen, als positiv angenommen.

140.

Wann es sich dahero zuträgt, daß aus einer Negativ-Zahl die Quadrat-Wurzel gezogen werden soll, so muß man sich allerdings in einer großen Verlegenheit befinden, weil sich keine Zahl angeben läßt, deren Quadrat eine Negativ-Zahl wäre. Denn wann man z. E. die Quadrat-Wurzel von der Zahl

-4 verlangt, so will man eine solche Zahl haben, welche mit sich selbst multiplicirt -4 gebe. Diese gesuchte Zahl ist also weder $+2$ noch -2, indem so wohl $+2$ als -2, mit sich selbsten multiplicirt allemal $+4$ giebt, und nicht -4.

141.

Hieraus erkennt man also, daß die Quadrat-Wurzel von einer Negativ-Zahl weder eine Positiv- noch Negativ-Zahl seyn könne, weil auch von allen Negativ-Zahlen die Quadrate positiv werden, oder das Zeichen $+$ bekommen; folglich muß die verlangte Wurzel von einer gantz besondern Art Zahlen seyn, indem dieselbe weder zu den Positiv- noch Negativ-Zahlen gerechnet werden kann.

142.

Da nun oben schon angemerckt worden, daß die Positiv-Zahlen alle gröſser sind, als nichts oder 0: Die Negativ-Zahlen hingegen alle kleiner sind, als nichts, oder 0; also, daß alles was gröſser ist als nichts, durch Positiv-Zahlen; alles aber was kleiner ist als nichts, durch Negativ-Zahlen ausgedrückt wird: So sehen wir, daß die Quadrat-Wur-

Wurzeln aus Negativ-Zahlen weder größer sind als nichts, noch kleiner als nichts. Nichts sind sie aber doch auch nicht, weil ○ mit ○ multiplicirt ○ und also keine Negativ-Zahl giebt.

143.

Weil nun alle mögliche Zahlen, die man sich nur immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner sind als ○, oder etwa ○ selbst; so ist klar, daß die Quadrat-Wurzel von Negativ-Zahlen nicht einmahl unter die möglichen Zahlen können gerechnet werden: Folglich müßen wir sagen, daß dieselben ohnmögliche Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet uns auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach ohnmöglich sind, und gemeiniglich **Imaginäre Zahlen**, oder **eingebildete Zahlen** genennt werden, weil sie blos allein in der Einbildung statt finden.

144.

Dahero bedeuten alle diese Ausdrücke $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, etc. solche ohnmögliche oder Imaginäre-Zahlen, weil dadurch Quadrat-Wurzeln von Negativ-Zahlen angezeigt werden.

Von diesen behauptet man also mit allem Recht daß sie weder größer noch kleiner sind als nichts; und auch nicht einmahl nichts selbsten, als aus welchem Grund sie folglich für ohnmöglich gehalten werden müßen.

145.

Gleichwohl aber werden sie unserm Verstand dargestellt, und finden in unserer Einbildung statt; daher sie auch blos eingebildete Zahlen genennt werden. Ungeacht aber diese Zahlen als Z. E. $\sqrt{-4}$, ihrer Natur nach ganz und gar ohnmöglich sind, so haben wir davon doch einen hinlänglichen Begriff, indem wir wißen, daß dadurch eine solche Zahl angedeutet werde, welche mit sich selbsten multiplicirt zum Product -4 hervorbringe; und dieser Begriff ist zureichend um diese Zahlen in der Rechnung gehörig zu behandeln.

146.

Dasjenige nun, was wir zu allererst von dergleichen ohnmöglichen Zahlen, als Z. E. von $\sqrt{-3}$, wißen, besteht darin, daß das Quadrat davon, oder das Product welches herauskommet, wann

wann $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt wird, -3 giebt, eben so ist $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-1}$, mult. -1. Und überhaupt wann man $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$, multiplicirt oder das Quadrat von $\sqrt{-a}$ nimmt, so giebt es $-a$.

147.

Da $-a$ so viel ist, als $+a$ mit -1 multiplicirt, und die Quadrat-Wurzel aus einem Product gefunden wird, wann man die Quadrat-Wurzel aus den Factoren mit einander multiplicirt, so ist Radix aus a mit -1 multiplicirt oder $\sqrt{-a}$ so viel, als $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt. Nun aber ist $\sqrt{a}$ eine mögliche Zahl, folglich läßt sich dieses ohnmögliche, welches darin vorkommt, allezeit auf $\sqrt{-1}$ bringen. Aus diesem Grunde ist also $\sqrt{-4}$ so viel als $\sqrt{4}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt: $\sqrt{4}$ aber ist 2, also ist $\sqrt{-4}$ so viel als $2\sqrt{-1}$. und $\sqrt{-9}$ so viel als $\sqrt{9}.\sqrt{-1}$, das ist $3\sqrt{-1}$. und $\sqrt{-16}$ so viel als $4\sqrt{-1}$.

148.

Da ferner $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt, $\sqrt{ab}$ giebt, so wird $\sqrt{-2}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt $\sqrt{6}$ geben. Eben so wird $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-4}$ multiplicirt $\sqrt{4}$, das ist

2 geben. Hieraus sieht man daß zwey ohnmögliche Zahlen mit einander multiplicirt eine mögliche, oder würckliche Zahl hervorbringen.

Wann aber $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{+5}$, multiplicirt wird, so bekommt man $\sqrt{-15}$. Oder eine mögliche Zahl mit einer unmöglichen multiplicirt, giebt allezeit etwas unmögliches.

149.

Eben so verhält sich die Sache auch mit der Division. Dann da $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt $\sqrt{\frac{a}{b}}$ giebt, so wird $\sqrt{-4}$ durch $\sqrt{-1}$ dividirt $\sqrt{+4}$ geben, und $\sqrt{+3}$ durch $\sqrt{-3}$ dividirt wird geben $\sqrt{-1}$: Ferner 1 durch $\sqrt{-1}$ dividirt, giebt $\sqrt{\frac{+1}{-1}}$ das ist $\sqrt{-1}$ weil 1 so viel ist, als $\sqrt{+1}$.

150.

Wie aber die obige Anmerckung allezeit statt findet, daß die Quadrat-Wurzel aus einer jeglichen Zahl immer einen doppelten Werth hat, oder so wohl negativ als positiv genommen werden kann, indem z E: $\sqrt{4}$, so wohl $+2$ als -2 ist, und überhaupt für die Quadrat-Wurzel aus a so wohl $+\sqrt{a}$ als $-\sqrt{a}$, geschrieben werden kann, so gilt dieses

dieses auch bey den unmöglichen Zahlen; und die Quadrat-Wurzel aus $-a$, ist so wohl $+\sqrt{-a}$ als $-\sqrt{-a}$, wobey man die Zeichen $+$ und $-$ welche vor dem $\sqrt{}$ Zeichen gesetzt werden, von dem Zeichen so hinter dem $\sqrt{}$ Zeichen steht, wohl unterscheiden muß,

151.

Endlich muß noch ein Zweifel gehoben werden, welcher darinn besteht, daß da dergleichen Zahlen ohnmöglich sind, dieselben auch gantz und gar keinen Nutzen zu haben scheinen und diese Lehre als eine bloße Grille angesehen werden könnte. Allein dieselbe ist in der That von der grösten Wichtigkeit, indem öfters Fragen vorkommen, von welchen man so gleich nicht wißen kann, ob sie möglich sind oder nicht. Wann nun die Auflösung derselben auf solche ohnmögliche Zahlen führt, so ist es ein sicheres Zeichen, daß die Frage selbst ohnmöglich sey. Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so laßt uns diese Frage betrachten: Man soll die Zahl 12 in zwey solche Theile zerschneiden, deren Product 40 ausmache; Wann man nun diese Frage nach den Regeln auflößt, so findet man für die zwey gesuchten Theile $6+\sqrt{-4}$, und $6-\sqrt{-4}$ welche folglich unmög-

lich sind, und hieraus eben erkennt man, daß diese Frage ohnmöglich könne aufgelößt werden. Wolte man aber die Zahl 12 in zwey solche Theile zerschneiden, deren Product 35 wäre, so ist offenbar, daß diese Theile 7 und 5 seyn würden.

Capitel 14.

Von den Cubic-Zahlen.

152.

Wann eine Zahl dreymal mit sich selbst, oder ihr Quadrat nochmahls mit derselben Zahl multiplicirt wird, so wird das Product ein **Cubus** oder eine **Cubic-Zahl** genennet. Also ist von der Zahl a, der Cubus a a a, welcher entsteht, wann die Zahl a, mit sich selbsten nemlich mit a, und das Quadrat derselben a a, nochmals mit der Zahl a, multiplicirt wird.

Also sind die Cubi von den natürlichen Zahlen folgende,

Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
Cubus 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000

153.

Wann wir bey diesen Cubic-Zahlen ihre Differenzen, wie bey den Quadrat-Zahlen geschehen, in Betrachtung ziehen, indem wir eine jede von der folgenden subtrahiren, so bekommen wir folgende Reihe von Zahlen wobey wir noch keine Ordnung bemercken,

7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271;

wann wir aber von denselben noch ferner die Differenzen nehmen so erhalten wir folgende Reihe Zahlen welche offenbar immer um 6 steigen; als:

12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54.

154.

Solcher gestalt wird man auch leicht die Cubos von Brüchen finden können: also ist von $\frac{1}{2}$ der Cubus $\frac{1}{8}$; von $\frac{1}{3}$ ist er $\frac{1}{27}$, von $\frac{2}{3}$ ist er $\frac{8}{27}$. Man darf nemlich nur besonders vom Zähler und Nenner die Cubos nehmen. Also vom Bruch $\frac{3}{4}$ wird der Cubus seyn $\frac{27}{64}$.

155.

Wann von einer vermischten Zahl der Cubus gefunden werden soll, so muß dieselbe erstlich in

einen

einen einzeln Bruch verwandelt werden, da dann die Rechnung leicht angestellet wird. Also von der Zahl $1\frac{1}{2}$ wird es leicht seyn den Cubum zu finden: dann da $1\frac{1}{2}$ zu einen einzeln Bruch gebracht $\frac{3}{2}$ ist, so wird der Cubus von $\frac{3}{2}$ seyn $\frac{27}{8}$ das ist 3 und $\frac{3}{8}$. Eben so von der Zahl $1\frac{1}{4}$ oder $\frac{5}{4}$ ist der Cubus $\frac{125}{64}$, das ist, 1 und $\frac{61}{64}$. Ferner von der Zahl $3\frac{1}{4}$ oder $\frac{13}{4}$ ist der Cubus $\frac{2197}{64}$, welches giebt $34\frac{21}{64}$.

156.

Da von der Zahl a der Cubus aaa ist, so wird von der Zahl ab, der Cubus seyn aaabbb; woraus man sieht, daß wann die Zahl zwey oder mehr Factores hat, der Cubus davon gefunden werde, wann man die Cubos von jeglichen Factoren mit einander multiplicirt. Also z E: weil 12, so viel ist als 3. 4, so multiplicirt man den Cubus von 3 welcher ist 27, mit dem Cubus von 4, welcher ist 64, so bekommt man 1728, und dieses ist der Cubus von 12. Hieraus ist ferner klar, daß der Cubus von 2a ist 8aaa und also 8 mal größer, als der Cubus von a; eben so ist von 3a der Cubus 27aaa und also 27 mal größer als der Cubus von a.

Die-

157.

Ziehen wir nun auch die Zeichen + und — in Betrachtung, so ist für sich klar, daß von einer Positiv-Zahl + a der Cubus + a a a und folglich auch Positiv seyn müße. Wann aber von einer Negativ-Zahl, als — a, der Cubus genommen werden soll, so nehme man erstlich das Quadrat, welches ist + a a, und da solches nochmals mit — a multiplicirt werden soll, so wird der gesuchte Cubus seyn — a a a und wird folglich auch Negativ seyn. Dahero es mit den Cubis eine gantz andere Bewantniß hat als mit den Quadraten, welche allezeit Positiv herauskommen. Also ist von — 1, der Cubus — 1, von — 2, der Cubus — 8; von — 3, ist er — 27, und so fort.

Capitel

Capitel 15.

Von den Cubic-Wurzeln und den daher entspringenden Irrational-Zahlen.

158.

Da gezeigt worden, wie von einer gegebenen Zahl der Cubus gefunden werden soll, so kann auch umgekehrt aus einer gegebenen Zahl diejenige Zahl gefunden werden, welche drey mal mit sich selbsten multiplicirt dieselbe Zahl hervorbringe: und diese wird in Ansehung jener ihre **Cubic-Wurzel** genennet. Also ist die Cubic-Wurzel aus einer vorgegebenen Zahl, eine solche Zahl, deren Cubus der vorgegebenen Zahl gleich ist.

159.

Wann also die vorgegebene Zahl eine würckliche Cubic-Zahl ist, dergleichen wir im obigen Capitel gefunden, so ist leicht die Cubic Wurzel davon zu finden. Also ist von 1, die Cubic-Wurzel 1; von 8 ist sie 2; von 27, ist sie 3; von 64 ist sie 4, und so fort:

Eben

Eben so ist auch von −27, die Cubic Wurzel −3; von −125, ist sie −5. Wann auch die Zahl gebrochen ist, so ist von $\frac{8}{27}$ die Cubic Wurzel $\frac{2}{3}$, und von $\frac{64}{343}$ ist sie $\frac{4}{7}$. Ferner wann es eine vermischte Zahl ist als $2\frac{10}{27}$ welche in einen einzeln Bruch $\frac{64}{27}$ beträgt, so ist die Cubic-Wurzel davon $\frac{4}{3}$ das ist $1\frac{1}{3}$.

160.

Wann aber die vorgegebene Zahl kein würcklicher Cubus ist, so läßt sich auch die Cubic-Wurzel davon, weder durch gantze, noch gebrochene Zahlen, ausdrücken; also da 43 keine Cubic-Zahl ist, so kann unmöglich weder in gantzen noch gebrochenen Zahlen, eine Zahl angezeigt werden, deren Cubus genau 43 ausmache. Inzwischen aber wißen wir doch so viel, daß die Cubic-Wurzel davon größer sey, als 3, weil der Cubus davon nur 27 ausmacht, und doch kleiner als 4, weil der Cubus davon schon 64 ist. Folglich wißen wir, daß die verlangte Cubic-Wurzel zwischen den Zahlen 3 und 4, enthalten seyn müße.

161.

Wollte man nun zu 3, weil die Cubic-Wurzel aus 43 größer ist als 3, noch einen Bruch hinzusetzen

so

so könnte man der Wahrheit näher kommen, da aber doch der Cubus davon immer einen Bruch enthalten würde, so könnte derselbe niemahls genau 43 werden. Man setze z. E. die gesuchte Cubic-Wurzel wäre $3\frac{1}{2}$ oder $\frac{7}{2}$ so würde der Cubus davon seyn $\frac{343}{8}$ oder $42\frac{7}{8}$, folglich nur um $\frac{1}{8}$ kleiner als 43.

162.

Hieraus ist also klar, daß sich die Cubic-Wurzel aus 43 auf keinerley weise durch gantze Zahlen und Brüche ausdrücken laße; da wir aber gleichwohl einen deutlichen Begriff von der Größe derselben haben, so bedient man sich dieselben anzuzeigen dieses Zeichens $(\sqrt[3]{\ })$ so vor die gegebene Zahl gesetzet, und mit dem Worte Cubic-Wurzel ausgesprochen wird, um daßelbe von der Quadrat-Wurzel zu unterscheiden. Also bedeutet $\sqrt[3]{43}$, die Cubic-Wurzel von 43, das ist, eine solche Zahl, deren Cubus 43 ist, oder welche dreymal mit sich selbsten multiplicirt 43, hervorbringt.

163.

Hieraus ist klar, daß dergleichen Ausdrücke keinesweges zu den Rationalen gehören, sondern eine beson-

besondere Art von Irrational-Grössen darstellen. Sie haben auch mit den Quadrat-Wurzeln keine Gemeinschaft, und es ist nicht möglich eine solche Cubic-Wurzel durch eine Quadrat-Wurzel, als etwan $\sqrt{12}$ auszudrücken: dann da von $\sqrt{12}$ das Quadrat 12 ist, so ist der Cubus davon $12\sqrt{12}$ und also noch Irrational, folglich kann derselbe nicht 43 seyn.

164.

Ist aber die vorgegebene Zahl ein würcklicher Cubus, so werden diese Ausdrücke Rational, also ist $\sqrt[3]{1}$ so viel als 1, $\sqrt[3]{8}$ so viel als 2, und $\sqrt[3]{27}$ so viel als 3, und überhaupt $\sqrt[3]{aaa}$ so viel als a.

165.

Sollte man eine Cubic-Wurzel als $\sqrt[3]{a}$ mit einer andern multipliciren, als mit $\sqrt[3]{b}$, so ist das Product $\sqrt[3]{ab}$; dann wir wißen, daß die Cubic-Wurzel aus einem Product ab gefunden wird, wann man die Cubic-Wurzel aus den Factoren mit einander multiplicirt.

Und eben so, wann $\sqrt[3]{a}$ durch $\sqrt[3]{b}$ dividirt werden soll, so ist der Quotus $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

166.

Dahero begreift man, daß $2\sqrt[3]{a}$ so viel ist als $\sqrt[3]{8a}$, weil 2 so viel ist als $\sqrt[3]{8}$. Eben so ist $3\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{27a}$, und $b\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{abbb}$. Dahero auch umgekehrt, wann die Zahl hinter dem Zeichen einen Factorem hat der ein Cubus ist, die Cubic-Wurzel daraus vor das Zeichen gesetzt werden kann: Also ist $\sqrt[3]{64a}$ so viel als $4\sqrt[3]{a}$, und $\sqrt[3]{125a}$ so viel als $5\sqrt[3]{a}$. Hieraus folgt, daß $\sqrt[3]{16}$ so viel ist als $2\sqrt[3]{2}$, weil 16 dem 8. 2 gleich ist.

167.

Wann die vorgegebene Zahl negativ ist, so hat die Cubic-Wurzel davon keine solche Schwierigkeit, wie oben bey den Quadrat-Wurzeln geschehen; weil nehmlich die Cubi von Negativ-Zahlen auch negativ werden, so sind auch hinwiederum die Cubic-Wurzel aus Negativ-Zahlen negativ. Also ist $\sqrt[3]{-8}$ so viel als -2, und $\sqrt[3]{-27}$ ist -3. Ferner $\sqrt[3]{-12}$ ist so viel als $-\sqrt[3]{12}$ und $\sqrt[3]{-a}$ so viel als $-\sqrt[3]{a}$. Woraus man sieht, daß Zeichen

chen (—) so hinter dem Cubic-Wurzel Zeichen ist, auch vor dasselbe geschrieben werden kann. Also werden wir hier auf keine unmögliche, oder eingebildete Zahlen geleitet, wie bey den Quadrat-Wurzeln der Negativ-Zahlen geschehen.

Capitel 16.

Von den Potestäten, oder Potenzen überhaupt.

168.

Wann eine Zahl mehrmalen mit sich selbsten multiplicirt wird, so wird das Product eine **Potestät**, oder auch **Potenz**, bisweilen auch eine **Dignität** genennet. Auf Teutsch könnte dieser Nahme durch eine Macht ausgedrückt werden. Da nun ein Quadrat entsteht, wann eine Zahl zwey mal mit sich selbsten multiplicirt wird, und ein Cubus wann die Zahl drey mal mit sich selbsten multiplicirt wird, so sind

STAATSBIBLIOTHEK BAMBERG

so wohl die Quadraten, als die Cubi, unter dem Nahmen der Potenzen oder Potestäten begriffen.

169.

Diese Potestäten werden nach der Anzahl, wie viel mal eine Zahl mit sich selbsten multiplicirt worden, von einander unterschieden. Also wann eine Zahl zwey mal mit sich selbsten multiplicirt wird so heißt das Product ihre zweyte Potestät, welche also eben so viel ist als das Quadrat davon; wird eine Zahl dreymal mit sich selbsten multiplicirt, so heißt das Product ihre dritte Potestät, welche also einerley Bedeutung mit dem Cubus hat: wird ferner eine Zahl vier mal mit sich selbsten multiplicirt, so wird das Product ihre vierte Potestät genennt, welche gemeiniglich mit dem Nahmen des Biquadrats belegt wird: woraus man ferner versteht, was die fünfte, sechste, siebente Potestät einer Zahl bedeute; welche höhere Potestäten übrigens keine besondere Nahmen zu führen pflegen.

170.

Um dieses beßer zu erläutern, so bemercken wir, erstlich daß von der Zahl 1 alle Potestäten immer 1 bleiben; weil so viele mal man auch 1 mit sich selbsten multiplicirt, das Product immer 1 bleibt. Laßt uns dahero die

Pote-

Potestäten der Zahl 2, so wie auch die Potestäten der Zahl 3 nach der Ordnung herschreiben. Diese gehen folgender maßen fort:

Potesteten.	der Zahl 2.	der Zahl 3.
I.	2	3
II.	4	9
III.	8	27
IV.	16	81
V.	32	243
VI.	64	729
VII.	128	2187
VIII.	256	6561
IX.	512	19683
X.	1024	59049
XI.	2048	177147
XII.	4096	531441
XIII.	8192	1594323
XIV.	16384	4782969
XV.	32768	14348907
XVI.	65536	43046721
XVII.	131072	129140163
XVIII.	262144	387420489

Aber insbesondere sind die Potestäten von der Zahl 10 merckwürdig. nehmlich

I. II. III. IV. V. VI.

10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000,

weil sich darauf unsere gantze Rechenkunst gründet. Uebrigens ist zu mercken, daß die kleinen darüber gesetzten Zahlen andeuten, die wie vielste Potestät eine jegliche sey.

171.

Wollen wir die Sache auf eine allgemeine Art betrachten, so würden sich die Potestäten der Zahl a folgender gestalt verhalten.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
a,	aa,	aaa,	aaaa,	aaaaa,	aaaaaa, etc.

Bey dieser Art zu schreiben ereignet sich aber diese Unbequemlichkeit, daß wann sehr hohe Potestäten geschrieben werden sollten, man eben denselben Buchstaben gar viele mal hinschreiben müßte, und es dem Leser noch viel beschwerlicher fallen würde, die Menge dieser Buchstaben zu zählen, um zu wißen die wie vielste Potestät dadurch angezeigt werde. Also z. E. würde sich die hundertste Potestät auf diese Art schwerlich schreiben laßen, und noch viel weniger zu erkennen seyn.

172.

Dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, hat man eine weit bequemere Art solche Potestäten auszudrücken eingeführt, welche wegen ihres herrlichen Nutzens auf das sorgfältigste erklärt zu werden verdienet. Man pflegt nemlich über der Zahl wovon z. E. die hundertste Potestät soll angezeigt werden, etwas seitwärts

wärts zur rechten die Zahl 100 zu schreiben: Also a^{100} welches ausgesprochen wird, a elivirt oder erhaben zu Hundert, drückt die Hunderste Potestät von a aus. Die dabey oben geschriebene Zahl, als in unserm Fall 100, pflegt der **Exponent** genennt zu werden, welche Nahmen wohl zu bemercken sind.

173.

Nach dieser Art deutet also a^2, oder a elivirt zu 2, die zweyte Potestät von a an, und pflegt auch bisweilen anstatt aa geschrieben zu werden; weil beyde Arten gleich leicht zu schreiben, und zu verstehen sind. Hingegen wird gemeiniglich anstatt des Cubi oder der dritten Potestät aaa, nach dieser neuen Art a^3 geschrieben, weil dadurch mehr Platz erspart wird. Eben so drückt a^4 die vierte Potestät, a^5 die fünfte, und a^6 die sechste Potestät von a aus.

174.

Nach dieser Art werden alle Potestäten von der Zahl a folgendergestallt vorgestellt,

$a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12}$, etc.

woraus man sieht, daß nach dieser Art für das erste Glied a, gar füglich a^1 geschrieben werden könnte, um die Ordnung desto deutlicher in die Augen fallen zu machen. Dahero ist a^1 nichts anders als a weil

die Unität anzeigt, daß der Buchstabe a nur einmal geschrieben werden soll. Eine solche Reihe von Potestäten pflegt auch eine Geometrische Progression genennt zu werden, weil immer ein jedes Glied um eben so viel mal größer ist, als das vorhergehende.

175.

Wie in dieser Reihe der Potestäten ein jedes Glied gefunden wird, wann man das vorhergehende mit a multiplicirt, wodurch der Exponent um eins größer wird; so wird auch aus einem jeglichen Gliede das vorhergehende gefunden, wann man jenes durch a dividirt, als wodurch der Exponent um eines vermindert wird. Hieraus sehen wir, daß das dem ersten Glied a^1 vorhergehende Glied $\frac{a}{a}$ seyn müße das ist 1: nach dem Exponenten wird aber eben dasselbe seyn a^0, als woraus diese merckwürdige Eigenschaft folgt, daß a^0 allezeit 1 seyn müße, die Zahl a mag auch so groß oder so klein seyn als sie immer will, ja so gar auch wenn a nichts ist, also das 0^0 gewis 1 ausmacht.

176.

Wir können diese Reihe von Potestäten noch weiter rückwärts fortsetzen, und dieses so gar auf eine doppelte Weise. Einmal, indem wir immer das

Glied

Glied durch a theilen; hernach aber auch, indem wir den Exponent um eins vermindern oder eins davon subtrahiren. Und wir sind gewiß, daß nach beyderley Arten die Glieder einander vollkommen gleich sind. Wir wollen also die obige Reihe auf diese gedoppelte Art rückwerts vorstellen, welche auch rückwerts von der rechten zur lincken gelesen werden muß;

1te	$\frac{1}{aaaaaa}$ $\frac{1}{a^6}$	$\frac{1}{aaaaa}$ $\frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{aaaa}$ $\frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{aaa}$ $\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{aa}$ $\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$ $\frac{1}{a^1}$	1	a
2te	a^{-6}	a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	1^1

177.

Hierdurch gelangen wir also zur Erkenntniß solcher Potestäten deren Exponenten negative Zahlen sind; und wir sind im Stande den Werth derselben genau anzuzeigen. Wir wollen daher dasjenige, was wir gefunden, folgender Gestalt vor Augen legen:

Erstlich a^0, ist so viel als 1.

— — a^{-1} — — — $\frac{1}{a}$

— — a^{-2} — — — $\frac{1}{aa}$ oder $\frac{1}{a^2}$

— — a^{-3} — — — $\frac{1}{a^3}$

— — a^{-4} — — — $\frac{1}{a^4}$ und so fort.

178.

Hieraus ist auch klar, wie die Potestäten von einem Product als ab gefunden werden müßen. Dieselben sind nemlich.

ab oder $a^1 b^1$, $a^2 b^2$, $a^3 b^3$, $a^4 b^4$, $a^5 b^5$, $a^6 b^6$, etc.

Eben so werden auch die Potestäten von Brüchen gefunden, als von dem Bruch $\frac{a}{b}$ sind die Potestäten folgende:

$\frac{a^1}{b^1}$ $\frac{a^2}{b^2}$, $\frac{a^3}{b^3}$, $\frac{a^4}{b^4}$, $\frac{a^5}{b^5}$, $\frac{a^6}{b^6}$, $\frac{a^7}{b^7}$, etc.

179.

Endlich kommen auch noch hier die Potestäten von Negativ-Zahlen zu betrachten vor. Es sey demnach gegeben die Negativ-Zahl $-a$, so werden ihre Potestäten der Ordnung nach also auf einander folgen, $-a$, $+aa$, $-a^3$, $+a^4$, $-a^5$, $+a^6$, $-a^7$ etc. Woraus erhellet, daß nur diejenige Potestäten deren Exponenten ungerade Zahlen sind negativ werden; Hingegen sind diejenige Potestäten, deren Exponenten grade sind, alle Positiv. Also haben die drite, fünfte, siebende, neunte, Potestäten der negativen Zahlen alle das Zeichen $-$.

Die zweyte, vierte, sechste, achte, Potestäten hingegen alle das Zeichen $+$.

Capitel 17.

Von den Rechnungs=Arten mit den Potestäten.

180.

In Ansehung der Addition und Subtraction ist hier nichts zu bemercken, indem verschiedene Potestäten nur mit dem Zeichen + und — verbunden werden.

Also ist $a^3 + a^2$ die Summa von der dritten und zweyten Potestät des a; und $a^5 - a^4$ ist der Rest, wann von der fünften Potestät die vierte abgezogen wird, und beydes kann nicht kürtzer ausgedrückt werden. Wann aber gleiche Potestäten vorkommen, so ist klar, daß für $a^3 + a^3$ geschrieben werden kann $2a^3$ etc.

181.

Bey der Multiplication solcher Potestäten aber kommt verschiedenes zu bemercken vor. Erstlich wann eine jede Potestät von a mit der Zahl a selbsten multiplicirt,

plicirt werden soll, so kommt die folgende Potestät heraus, deren Exponens um 1 größer ist. Also a^2 mit a multiplicirt giebt a^3, und a^3 mit a multiplicirt giebt a^4 etc. Eben so mit denjenigen deren Exponenten negativ sind, wann dieselben mit a multiplicirt werden sollen, darf man nur zu dem Exponens 1 addiren; Also a^{-1} mit a multiplicirt giebt a^0 das ist 1, welches daraus klar ist, weil a^{-1} so viel als $\frac{1}{a}$ ist welches mit a multiplicirt $\frac{a}{a}$ giebt, das ist 1. Eben so mit a^{-2}, wann solches mit a multiplicirt werden soll giebt a^{-1}, das ist $\frac{1}{a}$, und a^{-10} mit a multiplicirt, giebt a^{-9}, und so fort.

182.

Wann aber eine Potestät mit a a, oder mit der zweyten Potestät multiplicirt werden soll, so wird der Exponens um 2 größer; also a^2 mit a^2 multiplicirt giebt a^4, und a^3 mit a^2 multiplicirt giebt a^5; ferner a^4 mit a^2 multiplicirt giebt a^6, und überhaupt a^n mit a^2 multiplicirt giebt a^{n+2}. Eben so mit den Negativ-Exponenten, als a^{-1} mit a^2 multiplicirt, giebt a^1 das ist a, welches daraus klar ist, weil a^{-1} ist $\frac{1}{a}$, dieses mit aa multiplicirt giebt $\frac{aa}{a}$, das ist a. Eben so giebt a^{-2} mit a^2 multiplicirt a^0, das ist 1, ferner a^{-3} mit a^{-2} multiplicirt giebt a^{-1}.

183.

183.

Eben so ist klar, daß wann eine jegliche Potestät mit der dritten Potestät von a, oder mit a^3 multiplicirt werden soll, der Exponens derselben um 3 vermehrt werden müße; oder a^n mit a^3 multiplicirt giebt a^{n+3}. Und überhaupt wann zwey Potestäten von a mit einander mutiplicirt werden sollen, so ist das Product wieder eine Potestät von a, deren Exponens die Summa ist von jenen Exponenten. Also a^4 mit a^5 multiplicirt giebt a^9, und a^{12} mit a^7 multiplicirt giebt a^{19} etc.

184.

Aus diesem Grund können die hohen Potestäten von bestimmten Zahlen ziemlich leicht gefunden werden; als wann man zum Exempel die XXIVte Potestät von 2 haben wolte, so würde man dieselbe finden, wann man die XIIte Potestät mit der XIIte Potestät multiplicirt, weil 2^{24} so viel ist, als 2^{12} mit 2^{12} multiplicirt. Nun aber ist 2^{12}, so wie wir oben gesehen haben, 4096: daher multiplicirt man 4096 mit 4096 so wird das Product 16777216 die verlangte Potestät, nemlich 2^{24} anzeigen.

185.

Bey der Division ist folgendes zu mercken. Erstlich wann eine Potestät von a durch a dividirt werden

den soll, so wird ihr Exponent um 1 kleiner, oder man muß 1 davon subtrahiren. Also a^5 durch a dividirt giebt a^4, und a^0, das ist 1, durch a dividirt giebt a^{-1} oder $\frac{1}{a}$. Ferner a^{-3} durch a dividirt giebt a^{-4}.

186.

Wann hernach eine Potestät von a durch a^2 dividirt werden soll, so muß man von dem Exponenten derselben 2 abziehen, und wollte man dieselbe durch a^3 dividiren, so müßte man von ihrem Exponenten 3 abziehen. Und also überhaupt was für eine Potestät auch immer von a durch eine andere dividirt werden soll, so muß man von dem Exponenten der erstern den Exponenten der andern subtrahiren. Also a^{15} durch a^7 dividirt giebt a^8, und a^6 durch a^7 dividirt giebt a^{-1}. Ferner auch a^{-3} durch a^4 dividirt giebt a^{-7}.

187.

Hieraus ist leicht zu begreiffen wie Potestäten von Potestäten gefunden werden müßen, weil solches durch die Multiplication geschieht. Also wann man die zweyte Potestät, oder das Quadrat von a^3 verlangt, so ist dasselbe a^6, und die dritte Potestät, oder der Cubus von a^4 wird seyn a^{12}; woraus erhellet, daß um das Quadrat

drat einer Potestät zu finden, der Exponent derselben nur verdoppelt werden müße. Also von a^n ist das Quadrat a^{2n}, und der Cubus, oder die dritte Potestät von a^n wird seyn a^{3n}. Eben so wird auch die siebente Potestät von a^n gefunden a^{7n}, und so fort.

188.

Das Quadrat von a^2 ist a^4, das ist die vierte Potestät von a, welche dahero das Quadrat des Quadrats ist. Hieraus erhellet, warum man die vierte Potestät ein Biquadrat oder auch ein Quadratoquadrat nennet.

Weil ferner von a^3 das Quadrat a^6 ist, so pflegt auch die sechste Potestät ein Quadrato-Cubus genennt zu werden.

Endlich auch weil der Cubus von a^3 ist a^9, das ist die neunte Potestät von a, so pflegt dieselbe deswegen auch ein Cubocubus genennt zu werden. Mehrere Nahmen sind heut zuTage nicht üblich.

Capitel 18.

Von den Wurzeln in Absicht auf alle Potestäten.

189.

Weil die Quadrat-Wurzel einer gegebenen Zahl eine solche Zahl ist, deren Quadrat derselben gleich ist, und die Cubic-Wurzel eine solche, deren Cubus ihr gleich ist, so können auch von einer jeden gegebenen Zahl solche Wurzeln angezeigt werden, deren vierte oder fünfte, oder eine beliebige andre Potestät derselben gegebenen Zahl gleich ist. Um diese verschiedene Arten von Wurzeln von einander zu unterscheiden, wollen wir die Quadrat-Wurzel die zweyte Wurzel, und die Cubic-Wurzel die dritte Wurzel nennen, da dann diejenigen Wurzeln deren vierte Potestät einer gegebenen Zahl gleich ist, ihre vierte Wurzel heißen wird, und diejenige deren fünfte Potestät derselben Zahl gleich ist, ihre fünfte Wurzel und so fort heißen wird.

190.

Wie die zweyte oder Quadrat-Wurzel durch das Zeichen $\sqrt{}$, und die dritte oder Cubic-Wurzel durch dieses

dieses Zeichen $\sqrt[3]{}$ angedeutet wird; so pflegt man gleicher weise die vierte Wurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[4]{}$, die fünfte Wurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[5]{}$, und so weiter anzuzeigen; woraus dann klar ist, daß nach dieser Schreib-Art das Zeichen der Quadrat-Wurzel also $\sqrt[2]{}$ ausgedruckt werden sollte. Weil aber die Quadrat-Wurzel am öftesten vorkommen, so wird der Kürze halber die Zahl 2 aus dem Wurzel-Zeichen weggelaßen. Daher wann in dem Wurzel-Zeichen keine Ziffer befindlich ist, so muß allezeit dadurch die Quadrat-Wurzel verstanden werden.

191.

Um dieses vor Augen zu legen, so wollen wir die verschiedenen Wurzeln der Zahl a hierher setzen, und ihre Bedeutung anzeigen.

$\sqrt{}$ a ist die IIte Wurzel von a
$\sqrt[3]{}$ a = = = IIIte = = = a
$\sqrt[4]{}$ a = = = IVte = = = a
$\sqrt[5]{}$ a = = = Vte = = = a
$\sqrt[6]{}$ a = = = VIte = = = a u. s. w.

Also, daß hinwiederum die
IIte Potestät von $\sqrt{a}$ dem a gleich ist

IIIte . . . $\sqrt[3]{a} = a = = =$

IVte . . . $\sqrt[4]{a} = a = = =$

Vte . . . $\sqrt[5]{a} = a = = =$

VIte . . . $\sqrt[6]{a} = a = = =$ u. s. f.

192.

Die Zahl a mag nun groß oder klein seyn so begreift man daher, wie alle Wurzeln von diesen verschiedenen Graden verstanden werden müßen.

Wobey zu mercken, daß wann für a die Zahl 1 genommen wird, alle diese Wurzeln immer 1 bleiben, weil alle Potestäten von 1 immer 1 sind.

Wann aber die Zahl a größer ist als 1, so sind auch alle Wurzeln größer als 1.

Ist aber die Zahl kleiner als 1, so sind auch alle ihre Wurzeln kleiner als 1.

192.

Wann die Zahl a positiv ist, so begreift man aus demjenigen, was oben von den Quadrat- und Cubic-Wurzeln angeführt worden, daß auch alle übrige Wur-

Wurzeln würcklich angezeigt werden können, und folglich würckliche und mögliche Zahlen sind.

Ist aber die Zahl a negativ, so werden ihre zweyten vierten, sechsten und überhaupt alle gerade Wurzeln unmögliche Zahlen, weil alle gerade Potestäten so wohl von Positiv- als Negativ-Zahlen immer das Zeichen plus bekommen.

Hingegen aber werden die dritten fünften, siebenten, und überhaupt alle ungerade Wurzeln negativ, weil die ungeraden Potestäten von Negativ-Zahlen auch negativ sind.

194.

Wir erhalten also daher eine unendliche Menge neuer Arten von Irrational- oder Surdischen Zahlen, weil so oft die Zahl a keine solche würckliche Potestät ist als die Wurzel anzeiget, so offt ist es auch nicht möglich diese Wurzel durch gantze Zahlen oder Brüche auszudrücken, folglich gehöret dieselbe in dasjenige Geschlecht von Zahlen, welche Irrational-Zahlen genennt werden.

Capitel 19.

Von der Ausdrückung der Irrational-Zahlen durch gebrochene Exponenten.

195.

Wir haben eben in dem letzten Capitel von den Potestäten gezeiget, daß das Quadrat von einer jeglichen Potestät gefunden wird, wann man ihren Exponenten verdoppelt, und daß überhaupt das Quadrat oder die zweyte Potestät von a^n sey a^{2n}. Dahero ist hinwiedernm von der Potestät a^{2n} die Quadrat-Wurzel a^n, und wird folglich gefunden, wann man den Exponenten derselben halbirt oder durch 2 dividirt.

196.

Also ist von a^2 die Quadrat-Wurzel a^1, von a^4 ist die Quadrat-Wurzel a^2, und von a^6 ist die Quadrat-Wurzel a^3 und so fort. Weil nun dieses eine allgemeine Wahrheit ist, so sieht man, wann die Quadrat-Wurzel von a^3 gefunden werden soll, daß dieselbe $a^{\frac{3}{2}}$ seyn werde. Eben so wird von a^5 die Quadrat-Wurzel

Wurzel seyn $a^{\frac{5}{2}}$. Folglich von der Zahl a selbsten oder von a^1 wird die Quadrat-Wurzel seyn $a^{\frac{1}{2}}$. Woraus erhellet, daß $a^{\frac{1}{2}}$ eben so viel sey als $\sqrt{a}$, welche neue Manier die Quadrat-Wurzel anzudeuten wohl zu bemercken ist.

197.

Wir haben ferner gezeigt, daß um den Cubum von einer Potestät, als a^n, zu finden, man ihren Exponenten mit 3 multipliciren müße, und also der Cubus davon seyn werde a^{3n}.

Wann also rückwärts, von der Potestät a^{3n} die dritte oder die Cubic-Wurzel gefunden werden soll, so ist dieselbe a^n, und man hat nur nöthig den Exponenten jener durch 3 zu dividiren. Also von a^3 ist die Cubic-Wurzeln a^1 oder a, von a^6 ist dieselbe a^2, von a^9 ist dieselbe a^3 und so fort.

198.

Dieses muß nun auch wahr seyn, wann sich der Exponent nicht durch 3 theilen läßt, und daher wird von a^2 die Cubic-Wurzel seyn $a^{\frac{2}{3}}$. Und von

$a^{\frac{4}{3}}$ ist dieselbe $a^{1\frac{1}{3}}$ oder $a^{1\frac{1}{3}}$. Folglich wird auch von der Zahl a selbsten, das ist von a^1, die Cubic- oder dritte Wurzel seyn $a^{\frac{1}{3}}$. Woraus erhellet daß $a^{\frac{1}{3}}$ eben so viel sey als $\sqrt[3]{a}$.

199.

Eben so verhält es sich auch mit den höhern Wurzeln: und die vierte Wurzel von a wird seyn $a^{\frac{1}{4}}$, welches folglich eben so viel ist als $\sqrt[4]{a}$. Gleicher weise wird die fünfte Wurzel von a seyn $a^{\frac{1}{5}}$ welches eben so viel ist als $\sqrt[5]{a}$, und dieses ist auch von allen höhern Wurzeln zu verstehen.

200.

Man könnte nun also die schon längst eingeführte Wurzel Zeichen gänzlich entbehren, und anstatt derselben die hier erklärten gebrochenen Exponenten gebrauchen, allein da man einmal an jene Zeichen gewöhnet ist, und dieselben in allen Schriften vorkommen, so ist es nicht rathsam dieselben gänzlich abzuschafen. Doch wird heut zu Tag diese neue Art auch häuffig gebraucht, als welche die Natur der Sache deut-

lich

lich in sich faßt. Dann daß $a^{\frac{1}{2}}$ würcklich die Quadrat-Wurzel von a sey, sieht man gleich, wann man nur das Quadrat davon nimt, welches geschieht wann man $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt, da dann offenbahr herauskommt a^1 daß ist a.

201.

Hieraus ersieht man auch wie alle übrige gebrochene Exponenten verstanden werden müßen; als wann man hat $a^{\frac{4}{3}}$, so muß von der Zahl a erstlich ihre vierte Potestät a^4 genommen, und hernach die Cubic- oder dritte Wurzel gezogen werden, also daß $a^{\frac{4}{3}}$ eben so viel ist, als nach der gemeinen Art $\sqrt[3]{a^4}$. Eben so wird der Werth von $a^{\frac{3}{4}}$ gefunden, wann man erstlich den Cubum oder die dritte Potestät von a sucht, welche a^3 ist und hernach aus derselben die vierte Wurzel ziehet: Also daß $a^{\frac{3}{4}}$ eben so viel ist als $\sqrt[4]{a^3}$. Eben so ist $a^{\frac{4}{5}}$ eben so viel als $\sqrt[5]{a^4}$ und so weiter.

202.

Wann der Bruch, der den Exponenten vorstellt, größer ist als 1 so läßt sich der Werth auch folgen-

der Gestalt bestimmen. Es sey gegeben $a^{\frac{5}{2}}$, so ist dieses so viel als $a^{2\frac{1}{2}}$, welches heraus kommt, wann man a^2 mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt. Da nun $a^{\frac{1}{2}}$ so viel ist als $\sqrt{a}$, so ist $a^{\frac{5}{2}}$ so viel als $a^2\sqrt{a}$. Eben so ist $a^{\frac{10}{3}}$, das ist $a^{3\frac{1}{3}}$ eben so viel als $a^3\sqrt[3]{a}$; und $a^{\frac{15}{4}}$ das ist $a^{2\frac{3}{4}}$ ist eben so viel als $a^3\sqrt[4]{a^3}$. Aus welchen allen der herrliche Gebrauch der gebrochenen Exponenten genugsam erhellet.

203.

Auch in Brüchen hat derselbe seinen Nutzen. Als wann vorgegeben ist $\frac{1}{\sqrt{a}}$, so ist dieses so viel als $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$.

Wir haben aber oben gesehen daß ein solcher Bruch $\frac{1}{a^n}$ durch a^{-n} ausgedrückt werden kann, folglich kann $\frac{1}{\sqrt{a}}$ durch $a^{-\frac{1}{2}}$ ausgedrückt werden. Eben so wird $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ seyn $a^{-\frac{1}{3}}$, und $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}}$ wird verwandelt in $\frac{a^2}{a^{\frac{3}{4}}}$ woraus entspringet a^2 multiplicirt mit $a^{-\frac{3}{4}}$, welches ferner verwandelt wird

wird in $a^{\frac{5}{4}}$, das ist $a^{1\frac{1}{4}}$ und das ist ferner $a\sqrt[3]{a}$. Dergleichen Reductionen werden durch die Uebung gar merklich erleichtert.

204.

Endlich ist noch zu mercken, daß eine jede solche Wurzel auf vielerley Arten kann vorgestellt werden. Dann da $\sqrt{a}$ so viel ist als $a^{\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{2}$ in alle diese Brüche und $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}$, etc. verwandelt werden kann; so ist klar das $\sqrt{a}$ so viel ist als $\sqrt[4]{a^2}$, im gleichen auch $\sqrt[6]{a^3}$ imgleichen auch $\sqrt[8]{a^4}$ und so fort. Eben so ist $\sqrt[3]{a}$ so viel als $a^{\frac{1}{3}}$; $a^{\frac{1}{3}}$ aber so viel als $\sqrt[6]{a^2}$ oder $\sqrt[9]{a^3}$ oder $\sqrt[12]{a^4}$. Hieraus sieht man leicht, daß die Zahl a selbst, oder a^1, durch folgende Wurzel-Zeichen könne ausgedruckt werden,

$\sqrt[2]{a^2}$, oder $\sqrt[3]{a^3}$, oder $\sqrt[4]{a^4}$, oder $\sqrt[5]{a^5}$ etc.

205.

Dieses kommt bey der Multiplication und Division wohl zu statten: als z. E. wann $\sqrt[2]{a}$ mit $\sqrt[3]{a}$ multiplicirt werden soll, so schreibe man anstatt $\sqrt[2]{a}$ die $\sqrt[6]{a^3}$, und anstatt $\sqrt[3]{a}$ die $\sqrt[6]{a^2}$. Solcher gestalt hat man gleiche

Wurzel-Zeichen, und erhält daher das Product $\sqrt[6]{a^5}$. Welches auch daher erhellet weil $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{3}}$ multiplicirt giebt $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$. Nun aber ist $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{5}{6}$ und also das Product $a^{\frac{5}{6}}$ oder $\sqrt[6]{a^5}$. Solte $\sqrt[2]{a}$ oder $a^{\frac{1}{2}}$ durch $\sqrt[3]{a}$ oder $a^{\frac{1}{3}}$ dividirt werden, so bekömmt man $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ das ist $a^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$ also $a^{\frac{1}{6}}$, folglich $\sqrt[6]{a}$.

Capitel 20.

Von den verschiedenen Rechnungs-Arten und ihrer Verbindung überhaupt.

206.

Wir haben bisher verschiedene Rechnungs-Arten als die Addition, Subtraction, Multiplication uud Division, die Erhebung zu Potestäten, und endlich die Ausziehung der Wurzeln, vorgetragen.

Da-

Daher wird es nicht wenig zu beßerer Erleuterung dienen, wann wir den Ursprung dieser Rechnungs-Arten und ihre Verbindung unter sich deutlich erklären, damit man erkennen möge, ob noch andere dergleichen Arten möglich seyn oder nicht.

Zu diesem Ende brauchen wir ein neues Zeichen, welches anstatt der bisher so häufig vorgekommenen Redens-Art **ist so viel als**, gesetzt werden kann. Dieses Zeichen ist nun $=$ und wird aus gesprochen **ist gleich.** Also wann geschrieben wird $a = b$, so ist die Bedeutung, daß a eben so viel sey als b, oder das a dem b gleich sey; also ist z E. $3 \cdot 5 = 15$.

207.

Die erste Rechnungs-Art, welche sich unserm Verstand darstelt, ist ohnstreitig die Addition, durch welche zwey Zahlen zusammen addirt, oder die Summa derselben gefunden werden soll. Es seyen demnach a und b die zwey gegebenen Zahlen und ihre Summa werde durch den Buchstaben c angedeutet, so hat man $a + b = c$. Also wann die beyden Zahlen a und b bekant sind, so lehrt die Addition wie man daraus die Zahl c finden soll.

Man

208.

Man behalte diese Vergleichung $a + b = c$, kehre aber jetzt die Frage um, und frage wann die Zahlen a und c bekannt sind, wie man die Zahl b finden soll.

Man fragt also was man für eine Zahl zu der Zahl a addiren müße, damit die Zahl c herauskomme: Es sey z. E. $a = 3$ und $c = 8$, also daß $3 + b = 8$ seyn müßte, so ist klar, daß b gefunden wird, wann man 3 von 8 subtrahirt. Ueberhaupt also um b zu finden, so muß man a von c subtrahiren und da wird $b = c - a$. Dann wann a darzu addirt wird, so bekommt man $c - a + a$ das ist c.

Hierinnen besteht also der Ursprung der Subtraction.

209.

Die Subtraction entsteht also wann die Frage, welche bey der Addition vorkommt, umgekehrt wird. Und da es sich zutragen kann, daß die Zahl welche abgezogen werden soll, größer ist als diejenige von der sie abgezogen werden soll: als wann z. E. 9 von 5 abgezogen werden sollte: so erhalten wir daher den Begrif von einer neuen Art Zahlen, welche negativ genennt werden, weil $5 - 9 = -4$.

210.

Wann viele Zahlen, welche zusammen addirt werden sollen, einander gleich sind, so wird ihre Summa durch die Multiplication gefunden, und heißt alsdann das Product. Also bedeutet ab das Product, welches entsteht wann die Zahl a mit der Zahl b multiplicirt wird. Wenn wir nun dieses Product mit dem Buchstaben c andeuten, so haben wir $ab = c$, und die Multiplication lehrt, wann die Zahlen a und b bekant sind, wie man daraus die Zahl c finden solle.

211,

Laßt uns nun folgende Frage aufwerfen: Wann die Zahlen c und a bekannt sind, wie soll man daraus die Zahl b finden. Es sey z. E. $a = 3$ und $c = 15$, so daß $3b = 15$ und es wird gefragt, mit was für einer Zahl man 3 multipliciren müße, damit 15 herauskomme. Dieses geschieht nun durch die Division und wird dahero überhaupt die Zahl b gefunden, wann man c durch a dividirt; woraus folglich diese Gleichung entsteht $b = \frac{c}{a}$.

212.

Weil es sich nun oft zutragen kann, daß sich die Zahl c nicht würcklich durch die Zahl a theilen laße,

und

und gleich wohl der Buchstaben b einen bestimmten Werth haben muß, so werden wir auf eine neue Art von Zahlen geleitet, welche Brüche genennt werden. Also wann wir annehmen $a = 4$, und $c = 3$, also daß $4b = 3$, so sieht man wohl, daß b keine gantze Zahl seyn kann, sondern ein Bruch ist, nehmlich $b = \frac{3}{4}$.

213.

Wie nun die Multiplication aus der Addition entstanden, wann viele Zahlen die addirt werden sollen, einander gleich sind, so wollen wir jetzt auch bey der Multiplication annehmen, daß viele gleiche Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen, und dadurch gelangen wir zu den Potestäten, welche auf eine allgemeine Art durch diese Form a^b vorgestellt werden, wodurch angezeigt wird, daß die Zahl a so viele mal mit sich selber multiplicirt werden müße, als die Zahl b anweiset. Hier wird wie oben gemeldet a die Wurzel, b der Exponent und a^b die Potestät genennet.

214.

Laßet uns nun diese Potestät selbst durch den Buchstaben c andeuten, so haben wir $a^b = c$ worinn also drey Buchstaben a, b, c, vorkommen. Dieses voraus-

ge-

gesetzt, so wird in der Lehre von den Potestäten gezeiget, wie man, wann die Wurzel a nebst dem Exponenten b bekannt ist, daraus die Potestät selbst, das ist den Buchstaben c bestimmen soll. Es sey z. E. $a = 5$, und $b = 3$, also das $c = 5^3$: woraus man sieht daß von 5 die dritte Potestät genommen werden müße, welche ist 125; also wird $c = 125$.

Hier wird also gelehrt wie man aus der Wurzel a und den Exponenten b, die Potestät c finden soll.

215.

Laßet uns nun auch hier sehen wie die Frage umgekehrt, oder verändert werden kann, also daß aus zweyen von diesen dreyen Zahlen a, b, c, die dritte gefunden werden soll, welches auf zweyerley Art geschehen kann, indem nebst dem c, entweder a oder b, für bekant angenommen wird. Wobey zu mercken, daß in den obigen Fällen bey der Addition und Multiplication nur eine Veränderung statt findet, weil im ersten Fall wo $a + b = c$, es gleich viel ist ob man nebst dem c, noch a, oder b, für bekant annimt, indem es gleich viel ist, ob ich schreibe $a + b$ oder $b + a$; und eben so verhält es sich auch mit der Gleichung $ab = c$ oder $ba = c$, wo die Buchstaben a und b ebenfals verwechselt werden können.

Allein

Allein dieses findet nicht statt bey den Potestäten, indem vor a^b keinesweges gesetzt werden kann b^a, welches aus einem einigen Exempel leicht zu ersehen; wann z. E. $a = 5$ und $b = 3$ gesetzt wird, so wird $a^b = 5^3 = 125$. Hingegen wird $b^a = 3^5 = 243$, welches sehr weit von 125 verschieden ist.

216.

Hieraus ist klar, daß hier würcklich noch zwey Fragen angestelt werden können, wovon die erste ist; Wann nebst der Potestät c, noch der Exponent b gegeben wird, wie man daraus die Wurzel a finden soll; Die zweyte Frage aber ist, wann nebst der Potestät c, noch die Wurzel a für bekant angenommen wird, wie man daraus den Exponenten b finden soll.

217.

Im obigen ist nur die erste von diesen zwey Fragen erörtert worden, und dieses ist geschehen in der Lehre von der Ausziehung der Wurzel. Dann wann man z. E. $b = 2$ und $a^2 = c$ so muß a eine solche Zahl seyn, deren Quadrat dem c gleich sey, und da wird $a = \sqrt[2]{c}$. Eben so wann $b = 3$ so hat man $a^3 = c$, da muß also der Cubus von a der gegebenen Zahl c gleich seyn, und

da

da erhält man $a = \sqrt[3]{c}$. Hieraus läßt sich auf eine allgemeine Art verstehen, wie man aus den beyden Buchstaben c und b den Buchstaben a finden müße. Es wird nemlich seyn $a = \sqrt[b]{c}$.

218.

So oft es sich nun ereignet, daß die gegebene Zahl c nicht würcklich eine solche Potestät ist, deren Wurzel verlangt wird, so ist schon oben bemercket worden, daß die verlangte Wurzel a weder in gantzen noch in Brüchen könne ausgedrückt werden. Da nun dieselbe gleichwohl ihren bestimmten Werth haben muß, so sind wir dadurch zu einer neuen Art von Zahlen gelanget, welche Irrational oder Surdische Zahlen genennt werden; von welchen es nach der Mannigfaltigkeit der Wurzeln, so gar unendlich vielerley Arten giebt. Auch hat uns diese Betrachtung noch auf eine gantz besondere Art von Zahlen geleitet, welche unmöglich sind und imaginäre, oder eingebildete Zahlen genennt werden.

219.

Man sieht also, daß uns noch eine Frage zu betrachten übrigen sey, nemlich wann außer der Potestät c noch die Wurzel a für bekant angenommen

wird, wie man daraus den Exponenten finden soll? Diese Frage wird uns auf die wichtige Lehre von den Logarithmen leiten, deren Nutzen in der gantzen Mathematic so groß ist, daß fast keine weitlaufige Rechnung ohne Hülfe der Logarithmen zu Stande gebracht werden kann. Wir werden also diese Lehre in dem folgenden Capitel erklären, wo wir wieder auf gantz neue Arten von Zahlen, welche nicht einmahl zu den obigen Irrationalen gerechnet werden können, werden geleitet werden.

Capitel 21.

Von den Logarithmen überhaupt.

220.

Wir betrachten also diese Gleichung $a^b = c$, und bemercken zuförderst, daß in der Lehre von den Logarithmen für die Wurzel a eine gewiße Zahl nach Belieben festgestellet werde, also daß dieselbe immer einerley

nerley Werth behalte. Wann nun der Exponent b also angenommen wird, daß die Potestät a^b einer gegebenen Zahl c gleich werde, so wird der Exponent b der Logarithmus dieser Zahl c genennt, und um dieselben anzuzeigen werde ich mich in zukumfft des Zeichens eines teutschen l bedienen, welches der Zahl c vorgesetzt wird; und also schreibt man $b = lc$ wodurch angedeutet wird, daß b gleich sey dem Logarithmus der Zahl c, oder der Logarithmus von c sey b.

221.

Nachdem also die Wurzel a einmahl festgestellet worden, so ist der Logarithmus einer jeglichen Zahl c, nichts anders als der Exponent derjenigen Potestät von a, welche der Zahl c gleich ist. Da nun $c = a^b$ so ist b der Logarithmus der Potestät a^b. Setzt man nun $b = 1$, so ist 1 der Logarithmus von a^1, das ist $la = 1$: setzt man $b = 2$, so ist 2 der Logarithmus von a^2, das ist $la^2 = 2$. Eben so wird man haben; $la^3 = 3$, $la^4 = 4$, $la^5 = 5$ und so ferner.

222.

Setzt man $b = 0$, so wird 0 der Logarithmus seyn von a^0: nun aber ist $a^0 = 1$, und also ist $l1 = 0$, die Wurzel a mag angenommen werden, wie man will.

Setzt man ferner $b = -1$, so wird -1 der Logarithmus von a^{-1}. Es ist aber $a^{-1} = \frac{1}{a}$; also hat man $l\frac{1}{a} = -1$. Eben so bekommt man $l\frac{1}{a^2} = -2$, $l\frac{1}{a^3} = -3$, $l\frac{1}{a^4} = -4$ etc.

223.

Hieraus erhellet wie die Logarithmen von allen Potestäten der Wurzel a und auch so gar von Brüchen, deren Zehler $= 1$, der Nenner aber eine Potestät von a ist, können angezeigt werden; in welchen Fällen die Logarithmen gantze Zahlen sind. Nimmt man aber für b Brüche an, so werden dieselben Logarithmen von Irrational-Zahlen; wann nemlich $b = \frac{1}{2}$ so ist $\frac{1}{2}$ der Logarithmus von $a^{\frac{1}{2}}$ oder von $\sqrt{a}$. Dahero bekommt man $l\sqrt{a} = \frac{1}{2}$; Eben so $l\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}$ und $l\sqrt[4]{a} = \frac{1}{4}$, und so fort.

224.

Wann aber der Logarithmus von einer andern Zahl c gefunden werden soll, so sieht man leicht, daß derselbe weder eine gantze Zahl noch ein Bruch seyn kann. Inzwischen muß es doch immer einen solchen Exponent geben, nemlich b, so daß die Potestät a^b

der

der gegebenen Zahl c gleich werde, und alsdann hat man $b = lc$. Folglich hat man auf eine allgemeine Art $a^{lc} = c$.

225.

Laßt uns nun eine andern Zahl d betrachten, deren Logarithmus ebenfals durch ld angedeutet wird also daß $a^{ld} = d$. Man multiplicire nun diese Formel mit der vorhergehenden $a^{lc} = c$, so bekommt man $a^{lc+ld} = cd$: nun aber ist der Exponent allezeit der Logarithmus der Potestät; folglich ist $lc + ld = lcd$. Dividirt man aber die erste Formel durch die letztere so bekommt man $a^{lc-ld} = \frac{c}{d}$. Folglich wird $lc - ld = l\frac{c}{d}$.

226.

Hierdurch werden wir zu den zwey Haupt-Eigenschaften der Logarithmen geführet, wovon die erste in der Gleichung $lc + ld = lcd$ besteht, und woraus wir lernen, daß der Logarithmus von einem Product als cd gefunden werde, wann man die Logarithmen der Factoren zusammen addirt. Die zweyte Eigenschaft ist in der Gleichung $lc - ld = l\frac{c}{d}$ enthalten und zeiget an, daß der Logarithmus von einem Bruch gefunden werde, wann man von dem Logarithmus des Zehlers den Logarithmus des Nenners subtrahirt.

227.

Und eben hierin bestehet der herrliche Nutzen, den die Logarithmen in der Rechenkunst leisten. Weil wann zwey Zahlen mit einander multiplicirt oder dividiren sollen, man nur nöthig habe die Logarithmen derselben zu addiren oder zu subtrahiren. Es ist aber offenbar, daß es ungleich viel leichter sey Zahlen zu addiren oder subtrahiren, als zu multipliciren oder dividiren, insonderheit wann die Zahlen sehr groß sind.

228.

Noch wichtiger aber ist der Nutzen bey den Potestäten und der Ausziehung der Wurzeln. Dann wann $d = c$, so hat man aus der erstern Eigenschaft $lc + lc = lcc$, also ist $lcc = 2lc$: Eben so bekommt man $lc^3 = 3lc$ und $lc^4 = 4lc$, und allgemein $lc^n = nlc$.

Nimmt man nun für n gebrochene Zahlen an, so bekommt man $lc^{\frac{1}{2}}$, das ist $l\sqrt{c} = \frac{1}{2}lc$; ferner auch für Negativ-Zahlen lc^{-1} das ist $l\frac{1}{c} = -lc$, und lc^{-2} das ist $l\frac{1}{cc} = -2lc$ und so fort.

229.

Wann man also solche Tabellen hat, worinnen für alle Zahlen die Logarithmen berechnet sind, so kann

man

man durch Hülfe derselben die schwerste Rechnungen, wo große Multiplicationen und Divisionen imgleichen auch Erhebungen zu Potestäten und Ausziehungen der Wurzeln vorkommen, mit leichter Mühe ausführen, weil man in diesen Tafeln so wohl für jede Zahl ihre Logarithmen, als auch für einen jeden Logarithmus die Zahl selbsten, finden kann. Also wann man aus einer Zahl c die Quadrat-Wurzel finden soll, so sucht man erstlich den Logarithmus der Zahl c welcher ist lc, hernach nimmt man davon die Hälfte welche ist $\frac{1}{2}$ lc, und diese ist der Logarithmus von der gesuchten Quadrat-Wurzel: allso die Zahl die diesem Logarithmus zukommt, und in der Tafel gefunden wird, ist die Quadrat-Wurzel selbst.

230.

Wir haben oben gesehen daß die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. und folglich alle Positiv-Zahlen Logarithmen sind von der Wurzel a und ihren positiven Potestäten; das ist von Zahlen die größer sind als Eins.

Hingegen die Negativ-Zahlen als — 1, — 2 etc. sind Logarithmen von den Brüchen $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$ etc. welche kleiner sind als Eins, gleichwohl aber noch größer als nichts.

Hieraus folgt, daß wann der Logarithmus positiv ist, die Zahl immer größer sey als Eins; wenn aber der Logarithmus negativ ist, so ist die Zahl immer kleiner als Eins, doch aber größer als o. Folglich können für Negativ-Zahlen keine Logarithmen angezeigt werden, oder die Logarithmen von Negativ-Zahlen sind unmöglich und gehören zu dem Geschlecht der imaginären oder eingebildeten Zahlen.

231.

Um dieses beßer zu erläutern, wird dienlich seyn für die Wurzel a eine bestimmte Zahl anzunehmen und zwar diejenige, nach welcher die üblichen Logarithmischen Tabellen berechnet sind. Es wird aber darinn die Zahl 10 für die Wurzel a angenommen, weil nach derselben schon die gantze Rechenkunst eingerichtet ist. Man sieht aber leicht, daß dafür eine jegliche andre Zahl, die nur größer ist als Eins, angenommen werden könnte; dann wann man $a = 1$ setzen wollte, so würden alle Potestäten davon als $a^b = 1$, und immer Eins bleiben, und niemals einer andern gegebenen Zahl als c gleich werden können.

Capitel 22.

Von den üblichen Logarithmischen Tabellen.

232.

In diesen Tabellen wird wie gemeldet zum Grund gelegt, daß die Wurzel $a = 10$ sey; Also ist der Logarithmus von einer jeglichen Zahl c derjenige Exponent, zu welchen wann die Zahl 10 erhoben wird, die Potestät der Zahl gleich werde. Oder wann der Logarithmus der Zahl c durch lc angedeutet wird, so hat man immer $10^{lc} = c$.

233.

Wir haben schon bemercket, daß von der Zahl 1 der Logarithmus immer o sey, weil $10^0 = 1$, also ist $l1 = 0, l10 = 1, l100 = 2, l1000 = 3, l10000 = 4, l100000 = 5$ $l1000000 = 6$.

ferner $l\frac{1}{10} = -1, l\frac{1}{100} = -2, l\frac{1}{1000} = -3, l\frac{1}{10000} = -4,$ $l\frac{1}{100000} = -5, l\frac{1}{1000000} = -6.$

234.

Wie sich nun die Logarithmen von diesen Haupt-Zahlen von sich selbst ergeben, so ist um so viel schwe-

rer die Logarithmen aller übrigen Zahlen zu finden, welche gleich wohl in den Tabellen müßen angezeigt werden. Hier ist auch noch nicht der Ort, eine hinlängliche Anweisung zu geben, wie dieselben gefunden werden sollen, dahero wollen wir nur überhaupt bemercken, was dabey zu beobachten vorkommt.

235.

Da nun $l1 = 0$, und $l10 = 1$, so ist leicht zu erachten daß von allen Zahlen zwischen 1 und 10, ihre Logarithmen zwischen 0 und 1 enthalten seyn müßen, oder sie sind größer als 0, und doch kleiner als 1;

Laßt uns nur die Zahl 2 betrachten, so ist gewiß daß ihr Logatithmus, den wir durch den Buchstaben x andeuten wollen, allso daß $l2 = x$, größer sey als 0, und doch kleiner als 1. Es muß aber eine solche Zahl seyn, daß 10^x just dem 2 gleich werde.

Man kann auch leicht sehen das x viel kleiner seyn müße als $\frac{1}{2}$, oder daß $10^{\frac{1}{2}}$ größer sey als 2, dann wann man beyderseits die Quadraten nimmt, so wird das Quadrat von $10^{\frac{1}{2}} = 10^1$: das Quadrat von 2 aber wird 4, also viel kleiner. Eben so ist auch $\frac{1}{3}$ für x noch zu groß, oder $10^{\frac{1}{3}}$ ist größer als 2. Denn der Cubus von

$10^{\frac{1}{3}}$,

$10^{\frac{1}{3}} = 10$, der Cubus von 2 aber ist nur 8. Hingegen ist $\frac{1}{4}$ für x angenommen zu klein: dann $10^{\frac{1}{4}}$ ist kleiner als 2, weil die vierte Potestät von jenem 10 ist von diesem aber 16. Hieraus sieht man also das x oder der $\sqrt{2}$ kleiner ist als $\frac{1}{3}$ und doch größer als $\frac{1}{4}$; man kann auch für einen jeden andern Bruch der zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ ist, finden, ob derselbe zu groß oder zu klein sey. Als $\frac{2}{7}$ ist kleiner als $\frac{1}{3}$ und größer als $\frac{1}{4}$ wollte man nun $\frac{2}{7}$ für x nehmen so müßte $10^{\frac{2}{7}} = 2$ seyn, wann aber dieses wäre, so müßen auch die siebende Potestäten einander gleich seyn: Es ist aber von $10^{\frac{2}{7}}$ die siebente Potestät $= 10^2 = 100$, welche der siebenten Potestät von 2 gleich seyn müßte; da nun die siebente Potestät von $2 = 128$ und also größer als jene, so ist auch $10^{\frac{1}{2}}$ kleiner, als 2 und also $\frac{2}{7}$ kleiner als $\sqrt{2}$: oder $\sqrt{2}$ ist größer als $\frac{2}{7}$ und doch kleiner als $\frac{1}{3}$.

Ein solcher Bruch ist $\frac{3}{10}$; sollte nun $10^{\frac{3}{10}} = 2$ seyn, so müßten auch die zehnte Potestäten einander gleich seyn: Es ist aber von $10^{\frac{3}{10}}$ die zehnte Potestät $= 10^3 = 1000$, von 2 aber ist die zehnte Potestät $= 1024$; woraus wir

schlie-

schließen das $\frac{3}{10}$ noch zu klein ist, oder das l2 größer sey als $\frac{3}{10}$ und doch kleiner als $\frac{1}{3}$.

236.

Diese Betrachtung dienet um zu zeigen, daß l2 seine bestimmte Größe habe, weil wir wißen, daß derselben gewis größer ist als $\frac{3}{10}$ und doch kleiner als $\frac{1}{3}$. Weiter können wir hier noch nicht gehen, und weil wir den wahren Werth noch nicht wißen so wollen wir für denselben den Buchstaben x gebrauchen, also daß $l2 = x$, und zeigen wann derselbe gefunden wäre, wie man daraus von unzählig viel andern Zahlen die Logarithmen finden könne; worzu die oben gegebene Gleichung dienet $lcd = lc + ld$, oder daß der Logarithmus von einem Product gefunden werde, wann man die Logarithmen der Factoren zusaminen addirt.

237.

Da nun $l2 = x$, und $l10 = 1$, so bekommen wir $l20 = x + 1$, und $l200 = x + 2$, ferner $l2000 = x + 3$ weiter $l20000 = x + 4$ und $l200000 = x + 5$ u. s. f.

238.

Da ferner $lc^2 = 2lc$ und $lc^3 = 3lc$, $lc^4 = 4lc$ etc. so erhalten wir daher $l4 = 2x$, $l8 = 3x$, $l16 = 4x$, $l32 = 5x$, $l64 = 6x$ etc.

Hier-

Hieraus finden wir ferner $l40 = 2x + 1$, $l400 = 2x + 2$,
$l4000 = 2x + 3$, $l40000 = 2x + 4$ etc.
$l80 = 3x + 1$, $l800 = 3x + 2$, $l8000 = 3x + 3$,
$l80000 = 3x + 4$ etc.
$l160 = 4x + 1$, $l1600 = 4x + 2$, $l16000 = 4x + 3$,
$l160000 = 4x + 4$ etc.

239.

Da ferner gefunden worden $l\frac{c}{d} = lc - ld$, so setze man $c = 10$, und $d = 2$, und weil $l10 = 1$ und $l2 = x$, so bekommen wir $l\frac{10}{2}$ das ist $l5 = 1 - x$ daher erhalten wir
$l50 = 2 - x$, $l500 = 3 - x$, $l5000 = 4 - x$ etc.
ferner $l25 = 2 - 2x$, $l125 = 3 - 3x$, $l625 = 4 - 4x$ etc.
Daher gelangen wir weiter zu folgenden:
$l250 = 3 - 2x$, $l2500 = 4 - 2x$, $l25000 = 5 - 2x$ etc.
ferner
$l1250 = 4 - 3x$, $l12500 = 5 - 3x$, $l125000 = 6 - 3x$ etc.
ferner
$l6250 = 5 - 4x$, $l62500 = 6 - 4x$, $l625000 = 7 - 4x$
und so fort.

240.

Hätte man auch den Logarithmus von 3 gefunden so könnte man daher noch von unendlich viel mehrern

rern Zahlen die Logarithmen bestimmen. Wir wollen den Buchstaben y für $l3$ setzen, und daher würden wir haben:

$l30 = y + 1$, $l300 = y + 2$, $l3000 = y + 3$, etc.

$l9 = 2y$, $l27 = 3y$, $l81 = 4y$, $l243 = 5y$, etc.

daher kan man noch weiter finden:

$l6 = x + y$, $l12 = 2x + y$, $l18 = x + 2y$,

imgleichen auch $l15 = l3 + l5 = y + 1 - x$.

241.

Wir haben oben gesehen, daß alle Zahlen aus den so genannten Prim-Zahlen durch die Multiplication hervor gebracht werden. Also wann nun die Logarithmen der Prim-Zahlen bekannt wären, so könte man daraus die Logarithmen aller andern Zahlen blos durch die Addition finden; als z. E. von der Zahl 210 welche aus folgenden Factoren besteht, 2.3.5.7, wird seyn der Logarithmus $= l2 + l3 + l5 + l7$: gleicher gestalt da $360 = 2.2.2.3.3.5 = 2^3 3^2 . 5$, so wird $l360 = 3l2 + 2l3 + l5$, woraus erhellet, wie man aus den Logarithmen der Prim-Zahlen die Logarithmen von allen andern Zahlen bestimmen

kann

kann. Also bey Verfertigung der Logarithmischen Tabellen hat man nur dafür zu sorgen, daß die Logarithmen von allen Prim-Zahlen gefunden werden.

Capitel 23.

Von der Art die Logarithmen vorzustellen.

242.

Wir haben gesehen, daß der Logarithmus von 2 größer ist als $\frac{3}{10}$ und kleiner als $\frac{1}{3}$; oder daß der Exponent von 10 zwischen diesen zwey Brüchen fallen müße, wann die Potestät dem 2 gleich werden soll: man mag aber einen Bruch annehmen, was man immer für einen will, so wird die Potestät immer eine Irrational-Zahl und entweder größer oder kleiner als 2 seyn, dahero sich der Logarithmus von 2 durch keinen solchen Bruch ausdrücken läßt. Man muß sich deswegen begnügen den Werth desselben durch Annäherungen so genau zu bestimmen, daß der Fehler unmercklich werde.

de. Hierzu bedienet man sich der so genannten Decimal-Brüche, deren Natur und Beschaffenheit deutlicher erklärt zu werden verdient.

243.

Man weiß, daß in der gewöhnlichen Art alle Zahlen mit den zehn Ziffern

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

zu schreiben, dieselben nur auf der ersten Stelle zur rechten Hand ihre natürliche Bedeutung haben, und daß auf der zweyten Stelle ihre Bedeutung 10 mal grösser werde, auf der dritten aber 100 mal, auf der vierten 1000 mal, und so fort auf einer jeden folgenden Stelle 10 mal grösser als auf der vorhergehenden.

Also in dieser Zahl 1765 steht auf der ersten Stelle zur rechten die Ziffer 5 die auch würcklich 5 bedeutet, auf der zweyten Stelle steht 6, welche aber nicht 6, sondern 10. 6 oder 60 anzeigt: die Ziffer 7 auf der dritten Stelle bedeutet 100. 7 oder 700, und endlich das 1 auf der vierten Stelle bedeutet 1000, und so wird auch diese Zahl ausgesprochen, indem man sagt:

Ein Tausend, Sieben Hundert, Sechzig, und Fünf.

244.

244.

Wie nun von der rechten zur lincken die Bedeutung der Ziffern immer 10 mal größer und folglich von der lincken zur rechten immer 10 mal kleiner wird, so kann man nach diesem Gesetz noch weiter gehen und gegen die rechte Hand fortrücken, da dann die Bedeutung der Ziffern immer fort 10 mahl kleiner wird. Hier muß man aber die Stelle wohl bemercken, wo die Ziffern ihren natürlichen Wert haben, dieses geschieht durch ein Comma, so hinter diese Stelle gesetzt wird. Wann man dahero diese Zahl geschrieben findet als 36,54892, so ist dieselbe also zu verstehen: erstlich hat die Ziffer 6 ihre natürliche Bedeutung, und die Ziffer 3 auf der zweyten Stelle von der lincken 30. Aber nach dem Comma bedeutet die Ziffer 5 nur $\frac{5}{10}$, die folgenden 4 sind $\frac{4}{100}$, die Ziffer 8 bedeutet $\frac{8}{1000}$, die Ziffer 9, $\frac{9}{10000}$ und die Ziffer 2, $\frac{2}{100000}$; woraus man sieht, daß je weiter diese Ziffern nach der rechten Hand fortgesetzt werden, ihre Bedeutungen immer kleiner und endlich so klein werden, daß sie vor nichts zu achten sind.

245.

Diese Art die Zahlen auszudrücken heißt nun ein Decimal-Bruch, und auf diese Art werden auch die Logarithmen in den Tabellen dargestellt. Daselbst wird z. E.

der Logarithmus von 2 also ausgedruckt 0, 3010300. Wobey folglich zu mercken, daß weil vor dem Comma 0 steht, dieser Logarithmus auch kein Gantzes betrage, und daß sein Werth sey $\frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{0}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{0}{1000000} + \frac{0}{10000000}$. Man hätte also wohl die zwey hintersten 0 weglaßen können, allein dieselben dienen um zu zeigen daß von diesen Theilgen würcklich keine vorhanden sind. Man läugnet aber nicht, daß nicht weiter noch kleinere Theilgen folgen sollten, welche man aber wegen ihrer Kleinigkeit für nichts achtet.

246.

Den Logarithmus von 3 findet man also ausgedrückt 0, 4771213; woraus man sieht, daß derselbe kein Gantzes betrage, sondern daß er aus diesen Brüchen bestehe

$$\frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{2}{100000} + \frac{1}{1000000} + \frac{3}{10000000}.$$

Man muß aber nicht glauben, daß dieser Logarithmus solchergestallt gantz genau ausgedrückt sey. Doch aber weiß man so viel, daß der Fehler gewiß kleiner ist als $\frac{1}{10000000}$, welcher auch würcklich so klein ist, daß man ihn in den meisten Rechungen aus der Acht laßen kann.

247.

Nach dieser Art heißt der Logarithmus von 1 also 0, 0000000, weil derselbe würcklich 0 ist; von 10 aber hei-

heißt der Logarithmus 1, 0000000, woraus man erkennt, daß derselbe just 1 sey. Von 100 aber ist der Logarithmus 2, 0000000, oder just 2, woraus zu sehen daß von den Zahlen zwischen 10 und 100, oder welche mit zwey Ziffern geschrieben werden, die Logarithmen zwischen 1 und 2 enthalten seyn müßen, und folglich durch 1 und einen Decimal-Bruch ausgedrückt werden. Also ist l 50 = 1, 6989700, derselbe ist also 1 und noch über das $\frac{6}{10} + \frac{9}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{7}{100000}$. Von den Zahlen aber über hundert bis 1000 enthalten die Logarithmen 2 nebst einem gesetzten Decimal-Bruch; als l 800 = 2, 9030900. Von 1000 bis 10000 sind die Logarithmen größer als 3. Von 10000 bis 100000 größer als 4 und so fort.

248.

Von den Zahlen unter 10 aber, welche nur mit einer Ziffer geschrieben werden, ist der Logarithmus noch kein Gantzes, und deswegen steht vor dem Comma eine 0. Bey einem jeden Logarithmus sind also zwey Theile zu bemercken. Der erste steht vor dem Comma und zeigt die Gantzen an, wann dergleichen vorhanden; der andre Theil aber zeigt die Decimal-Brüche an, die zu dem Gantzen noch gesetzt werden müßen. Also ist es leicht den ersten oder gantzen Theil des Logarithmus einer

jeglichen Zahl anzugeben, weil derselbe 0 ist für alle Zahlen, die nur aus einer Ziffer bestehen. Für die Zahlen die aus 2 Ziffern bestehen, ist derselbe 1. Derselbe ist ferner 2 für diejenige, so aus 3 Ziffern bestehen, und so fort ist derselbe immer um eins kleiner als die Anzahl der Ziffern. Wann man also den Logarithmus von 1766 verlangt, so weiß man schon, daß der erstere oder gantze Theil davon 3 seyn muß.

249.

Umgekehrt also, so bald man den ersten Theil eines Logarithmus ansieht, so weis man aus wie viel Figuren die Zahl selbst bestehen werde, weil die Anzahl der Figuren immer um eins größer ist als der gantze Theil des Logarithmus. Wann man also für eine unbekante Zahl diesen Logarithmus gefunden hätte 6, 4771213, so wüßte man so gleich daß dieselbe Zahl aus 7 Figuren bestehe und also größer seyn müße als 1000000. Diese Zahl ist auch würcklich 3000000: dann $l\,3000000 = l\,3 + l\,1000000$. Nun aber ist $l\,3 = 0,4771213$ und $l\,1000000 = 6$, welche zwey Logarithmus zusammen addirt geben 6, 4771213.

250.

Bey einem jeglichen Logarithmus kommt also die Hauptsach auf den nach dem Comma folgenden Decimal

cimal-Bruch an, welcher wann er einmahl bekant ist, für viele Zahlen dienen kann. Um dieses zu zeigen, wollen wir den Logarithmus der Zahl 365 betrachten deßen erster Theil ohnstreitig 2 ist, für den andern Theil, aber nemlich den Decimal-Bruch, wollen wir der Kürze halber den Buchstaben x schreiben, also daß $l365 = 2 + x$; hieraus erhalten wir, wann wir immerfort mit 10 multipliciren, $l3650 = 3 + x$; $l36500 = 4 + x$; $l365000 = 5 + x$. Wir können auch zurück gehen und immer durch 10 dividiren so bekommen wir $l36,5 = 1 + x$; $l3,65 = 0 + x$; $l0,365 = -1 + x$; $l0,0365 = -2 + x$; $l0,00365 = -3 + x$ und so ferner.

251.

Vor alle diese Zahlen nun, welche aus den Ziffern 365 entstehen, sie mögen o hinter oder vor sich haben, bleibt einerley Decimal-Bruch in ihren Logarithmus und der Unterscheid befindet sich nur in der gantzen Zahl vor dem Comma, welche wie wir gesehen auch negativ werden kann, wann nemlich die Zahl kleiner als 1 wird. Weil nun die gemeinen Rechner nicht wohl mit den Negativ-Zahlen umgehen können, so wird in diesen Fällen die gantze Zahl der Logarithmen um 10 vermehret, und anstatt o vor dem Comma,

pflegt man schon 10 zu schreiben, da man dann anstatt — 1, bekommt 9; anstatt — 2 bekommt man 8; anstatt — 3 bekommt man 7, und so fort. Hier muß aber gar nicht aus der Acht gelaßen werden, daß die gantze Zahlen vor dem Comma um 10 zu groß angenommen worden, damit man nicht schließe die Zahl bestehe aus 10 oder 9 oder 8 Figuren, sondern daß die Zahl erst nach dem Comma entweder auf der ersten Stelle, wann 9 vorhanden, oder auf der zweyten Stelle, wann 8 vorhanden, oder gar erst auf der dritten, wann 7 vom Anfang des Logarithmus steht, zu schreiben angefangen werden muß. Auf solche Art findet man die Logarithmen der Sinus in den Tabellen vorgestellt.

252.

In den gewöhnlichen Tabellen bestehen die Decimal-Brüche für die Logarithmen in sieben Figuren, wovon also die letzte $\frac{1}{10000000}$ Theile andeutet, und man kann sicher seyn, daß dieselben um kein einziges solches Theilgen von der Wahrheit abweichen, welcher Fehler gemeiniglich nichts zu bedeuten hat. Wollte man aber noch genauer rechneu, so müßten die Logarithmen noch auf mehr als sieben Figuren vorgestellet werden, welches in den großen Vlacquischen Tabellen geschieht, allwo die Logarithmen auf zehn Figuren berechnet sind.

253

253.

Weil der erste Theil eines Logarithmus keine Schwierigkeit hat, so wird derselbe in den Tabellen nicht gesetzt oder angezeigt, sondern man findet daselbst nur die sieben Figuren des Decimal-Bruchs, welche den zweyten Theil ausmachen. In den Englischen Tabellen findet man dieselben für alle Zahlen bis auf 100000 ausgedrückt und wann größere Zahlen noch vorkommen, so sind kleine Täfelgen beygefügt woraus man ersehen kann, wie viel wegen der folgenden Figuren noch zu den Logarithmen addirt werden müße.

254.

Hieraus ist also leicht zu verstehen, wie man aus einem gefundenen Logarithmus hinwiederum die ihm zukommende Zahl aus den Tabellen nehmen soll. Um die Sache beßer zu erläutern, so wollen wir z. E. diese Zahlen 343 und 2401 mit einander multipliciren. Da nun die Logarithmen davon addirt werden müßen, so kommt die Rechnung also zu stehen.

343 = 2,	5352941	addirt
2401 = 3,	3803923	addirt
5,	9156862	
	6847	subtrahirt
Giebt also 823543.		16

Diese Summa ist nun der Logarithmus des gesuchten Products, und aus desselben ersten Theil 5 erkennen wir, daß das Product aus 6 Figuren bestehe, welche aus dem Decimal-Bruch vermittelst der Tabelle gefunden worden 823543, und dieses ist würcklich das gesuchte Product.

255.

Da bey Ausziehung der Wurzeln die Logarithmen besonders einen wichtigen Vortheil leisten, so wollen wir auch dieses mit einem Exempel erläutern. Es soll aus der Zahl 10 die Quadrat-Wurzel gefunden werden. Da hat man also nur nöthig den Logarithmus von 10 welcher ist 1, 0000000 durch 2 zu dividiren, so wird der Quotus 0, 5000000, der Logarithmus der gesuchten Wurzel seyn. Dahero die Wnrzel selbst aus den Tabellen gefunden wird 3, 16228 wovon auch würcklich das Quadrat nur um $\frac{1}{100000}$ Theilichen grösser ist als 10.

Ende des ersten Abschnitts

Des

Ersten Theils

Zweyter Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungs-Arten mit zusammengesetzten Größen

Capitel 1.

Von der Addition mit zusammengesetzten Grösen.

256.

Wann zwey oder mehr Formeln, welche aus viel Gliedern bestehen zusammen addirt werden sollen, so pflegt die Addition zuweilen nur durch gewiße Zeichen angedeutet zu werden, indem man eine jede Formel in Klammern einschließt und dieselben mit dem Zeichen + verbindet. Also wann diese Formel

$$a+b+c$$

a + b + c und d + e + f zusammen addirt wer-
den sollen, so wird die Summa also angezeigt:

(a + b + c) + (d + e + f).

257.

Solcher gestalt wird die Addition nur angedeutet nicht aber vollzogen. Es ist aber leicht einzusehen, daß um dieselbe zu vollziehen man nur nöthig habe die Klammern wegzulaßen: dann da die Zahl d + e + f, zur ersten addirt werden soll, so geschieht solches wann man erstlich + d hernach + e und endlich + f hinzuschreibt, da dann die Summa seyn wird:

a + b + c + d + e + f.

Eben dieses würde auch zu beobachten seyn, wann einige Glieder das Zeichen — hätten, als welche so dann gleichfals mit ihrem Zeichen hinzu geschrieben werden müßten.

258.

Um dieses deutlicher zu machen, wollen wir ein Exempel in puren Zahlen betrachten, und zu der Formel 12 — 8 noch diese 15 — 6 addiren.

Man addire also erstlich 15, so hat man 12 — 8 + 15: man hat aber zu viel addirt, weil man nur 15 — 6 addiren sollte, und es ist klar daß man 6 zu viel addi-

ret

ret habe: man nehme also diese 6 wieder weg oder schreibe sie mit ihrem Zeichen dazu, so hat man die wahre Summa.

$$12 - 8 + 15 - 6.$$

Woraus erhellet, daß die Summa gefunden wird, wann man alle Glieder, ein jedes mit seinem Zeichen, zusammen schreibt.

259.

Wann demnach zu dieser Formel $a - b + c$ noch diese $d - e - f$ addirt werden soll, so wird die Summa folgender Gestalt ausgedrückt

$$a - b + c + d - e - f$$

Wobey wohl zu bemercken, daß es hier gar nicht auf die Ordnung der Glieder ankomme, sondern dieselben nach Belieben unter einander versetzt werden können, wann nur ein jedes sein ihm vorgesetztes Zeichen behält. Also könnte die obige Summa auch also geschrieben werden.

$$c - e + a - f + d - b.$$

260.

Folglich hat die Addition nicht die geringste Schwierigkeit, wie auch immer die Glieder aussehen mögen. Also wann zu dieser Formel $2a^3 + 6\sqrt{b} - 4!c$ noch

dieß

diese $5\sqrt[5]{a-7c}$ addirt werden sollte, so würde die Summa seyn:

$$2a^3+6\sqrt{b-4}\sqrt{c+5\sqrt[5]{a-7c}:}$$

woraus erhellet daß dieses die Summa sey, und es auch erlaubt ist diese Glieder nach Belieben unter einander zu versetzen, wann nur ein jedes sein Zeichen behält.

261.

Offters trägt es sich aber zu, daß die solchergestalt gefundene Summa weit kürtzer zusammen gezogen werden kann, indem zuweilen zwey oder mehr Glieder sich gäntzlich aufheben. Als wann in der Summa diese Glieder $+a-a$, oder solche $3a-4a+a$ vorkäme. Auch können bisweilen zwey oder mehrere Glieder in einem gebracht werden, wie z. E.

$3a+2a=5a$, $7b-3b=+4b$, $-6c+10c=+4c$
$5a-8a=-3a$, $-7b+b=-6b$, $-3c-4c=-7c$
$2a-5a+a=-2a$, $-3b-5b+2b=-6b$.

Diese Abkürzung findet also statt, so oft zwey oder mehr Glieder in Ansehung der Buchstaben völlig einerley sind. Hingegen $2aa+3a$ läßt sich nicht zusammen ziehen und $2b^3-b^4$ läßt sich auch nicht abkürtzen.

262.

262.

Wir wollen also einige Exempel von dieser Art betrachten. Erstlich sollen diese zwey Formeln addirt werden $a + b$ und $a - b$, da dann nach obiger Regel herauskommt $a + b + a - b$, nun aber ist $a + a = 2a$ und $b - b = 0$, folglich ist die Summa $= 2a$; Welches Exempel folgende sehr nützliche Wahrheit anzeiget.

Wann zu der Summa zweyer Zahlen $(a + b)$ ihre Differenz $(a - b)$ addirt wird, so kommt die grössere Zahl doppelt heraus.

Man betrachte noch folgende Exempel:

$3a - 2b - c$	$a^2 - 2aab + 2abb$
$5b - 6c + a$	$- aab + 2abb - b^3$
$4a + 3b - 7c$	$a^3 - 3aab + 4abb - b^3$.

Capitel

Capitel 2.

Von der Subtraction mit zusammengesetzten Größen.

263.

Wann man die Subtraction nur andeuten will, so schließt man eine jede Formel in Klammern ein, und diejenige welche abgezogen werden soll wird mit Vorsetzung des Zeichen — an diejenige angehänget von welcher sie abgezogen werden soll. Also wann von dieser Formel a — b + c diese d — e + f abgezogen werden soll, so wird der gesuchte Rest also angedeutet

$$(a - b + c) - (d - e + f)$$

als woraus deutlich zu ersehen, daß die letztere Formel von der ersten abgezogen werden soll.

264.

Um aber die Subtraction würcklich zu vollziehen, so ist vor das erste zu mercken, daß wenn von einer Größe als a eine andre positive Größe als + b abgezogen werden soll, so wird man bekommen a — b;

Wann

Wann aber eine negative Zahl als — b von a abgezogen werden soll, so wird man bekommen a + b, weil eine Schuld wegnehmen, eben so viel ist als etwas schencken.

265.

Laßt uns nun setzen, man soll von dieser Formel a — c, diese b — d subtrahiren; so nehme man erstlich b weg, da bekommt man a — c — b; wir haben aber zu viel weggenommen, dann wir sollten nur b — d wegnehmen, und das um d zu viel: wir müßen also dieses d wieder hinzusetzen, da wir dann erhalten

a — c — b + d.

woraus sich diese Regel offenbahr ergiebt, daß die Glieder derjenigen Formel, welche subtrahirt werden sollen mit verkehrten Zeichen hinzugeschrieben werden müßen.

266.

Durch Hülfe dieser Regel ist es also gantz leicht die Subtraction zu verrichten, indem die Formel von welcher subtrahirt werden soll, ordentlich hingeschrieben, diejenige Formel aber, welche subtrahirt werden soll, mit verkehrten oder verwechselten Zeichen angehänget wird. Also im ersten Exempel da von a — b

$+ c$ diese Formel $d - e + f$ abgezogen werden soll, so bekommt man:

$$a - b + c - d + e - f.$$

Um dieses mit puren Zahlen zu erläutern, so subtrahire man von $9 - 3 + 2$, diese Formel $6 - 2 + 4$, da bekömmt man

$$9 - 3 + 2 - 6 + 2 - 4 = 0.$$

welches auch so gleich in die Augen fällt; dann $9 - 3 + 2 = 8$, $6 - 2 + 4 = 8$, und $8 - 8 = 0$.

267.

Da nun die Subtraction selbst weiter keine Schwierigkeit hat, so ist nur noch übrig zu bemercken, daß wann in dem gefundenen Rest zwey oder mehr Glieder vorkommen, welche in Ansehung der Buchstaben einerley sind, die Abkürtzung nach eben denselben Regeln vorgenommen werden könne, welche oben bey der Addition gegeben worden.

268.

Es soll von $a + b$, wodurch die Summa zweyer Zahlen angedeutet wird, ihre Differenz $a - b$ subtrahirt werden, so bekommt man erstlich, $a + b - a + b$; nun aber ist $a - a = 0$ und $b + b = 2b$, folglich ist der gesuchte Rest $2b$, das ist die kleinere Zahl b doppelt genommen.

269.

269.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch einige Exempel beyfügen:

$aa + ab + bb$	$3a - 4b + 5c$
$bb - ab + aa$	$2b + 4c - 6a$
$2ab$	$9a - 6b + c$

$$a^3 + 3aab + 3abb + b^3$$
$$a^3 - 3aab + 3abb - b^3$$
$$6aab + 2b^3$$

$$\sqrt{a} + 2\sqrt{b}$$
$$\sqrt{a} - 3\sqrt{b}$$
$$+5\sqrt{b}$$

Capitel 3.

Von der Multiplication mit zusammengesetzten Größen.

270.

Wann eine solche Multiplication nur soll angezeigt werden, so wird eine jede von den Formeln, welche mit einander multipliciret werden sollen in Klammern eingeschloßen, und entweder ohne Zeichen oder mit einem dazwischen gesetzten Punckt an einander gehängt.

Also wann diese beyde Formeln $a - b + c$ und $d - e + f$ mit einander multiplicirt werden sollen, so wird das Product solcher Gestalt angezeiget.

$(a - b + c).(d - e + f)$ oder $(a - b + c)(d - e + f)$.

Diese Art wird sehr häuffig gebraucht, weil man daraus so gleich sieht, aus was für Factoren ein solches Product zusammen gesetzt ist.

271.

Um aber zu zeigen wie eine solche Multiplication würcklich angestellt werden müße, so ist erstlich zu mercken,

mercken, daß wann eine solche Formel a — b + c z. E. mit 2 multiplicirt werden soll, ein jedes Glied derselben besonders mit 2 multiplicirt werden müße, und also herauskomme

$$2a - 2b + 2c.$$

Eben dieses gilt auch von allen andern Zahlen. Wann also dieselbe Formel mit d multiplicirt werden soll so bekommt man:

$$ad - bd + cd.$$

272.

Hier haben wir vorausgesetzt, daß die Zahl d positiv sey: wann aber mit einer Negativ-Zahl als — e multiplicirt werden soll, so ist die oben gegebene Regel zu beobachten, daß nemlich zwey ungleiche Zeichen multiplicirt —, zwey gleiche aber + geben. Daher bekommt man:

$$-ae + be - ce.$$

273.

Um nun zu zeigen wie eine Formel, sie mag einfach oder zusammengesetzt seyn, als A, durch eine zusammengesetzte als d — e multiplicirt werden soll, so wollen wir erstlich pure Zahlen betrachten, und annehmen, daß A

mit 7 — 3 multiplicirt werden soll. Hier ist nun klar, daß man das vierfache von A verlange: nimmt man nun erstlich das siebenfache, so muß man hernach das dreyfache davon subtrahiren. Also auch überhaupt wann man mit d — e multiplicirt, so multiplicirt man die Formel A erstlich mit d und hernach mit e und subtrahirt das letztere Product von dem ersteren, also daß herauskommt d A — e A. Laßt uns nun setzen A = a — b welches mit d — e multiplicirt werden soll, so erhalten wir:

$$\begin{array}{l} dA = ad - bd \\ eA = ae - be \\ \hline ad - bd - ae + be \end{array}$$

welches das verlangte Product ist.

274.

Da wir nun das Product (a — b).(d — e) gefunden haben, und von der Richtigkeit desselben überzeugt sind, so wollen wir dieses Multiplications-Exempel folgender Gestalt deutlicher vor Augen stellen:

$$\begin{array}{r} a - b \\ d - e \\ \hline ad - bd - ae + be \end{array}$$

wo-

woraus wir sehen, daß ein jedes Glied der obern Formel mit einem jeglichen der untern multiplicirt werden müße, und daß wegen der Zeichen die obengegebene Regul gänzlich Statt habe, und hierdurch von neuem bestätiget werde, wann etwann jemand noch irgend einen Zweifel darüber gehabt hätte.

275.

Nach dieser Regul wird es also leicht seyn folgendes Exempel auszurechnen; a + b soll multiplicirt werden mit a − b:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline aa + ab \\ \quad - ab - bb \\ \hline \end{array}$$

das Product wird seyn aa − bb

276.

Wann also für a und b nach Belieben bestimmte Zahlen gesetzt werden, so leitet uns dieses Exempel auf folgende Wahrheit: Wann die Summa zweyer Zahlen mit ihrer Differentz multiplicirt wird, so ist das Product die Differentz ihrer Quadraten, welches also kann vorgestellt werden:

$(a + b)(a - b) = aa - bb$: folglich ist hinwiederum die Differenz zwischen zwey Quadrat-Zahlen immer ein Product, oder sie läßt sich theilen, so wohl durch die Summe als durch die Differenz der Wurzel, und ist also keine Prim-Zahl.

277.

Laßt uns noch ferner folgende Exempel ausrechnen;

I.) $2a - 3$ / $a + 2$

$2aa - 3a$

$+ 4a - 6$

$2aa + a - 6$

II.) $4aa - 6a + 9$ / $2a + 3$

$8a^3 - 12aa + 18a$

$+ 12aa - 18a + 27$

$8a^3 + 27$

III.) $3aa - 2ab - bb$ / $2a - 4b$

$6a^3 - 4aab - 2abb$

$- 12aab + 8abb + 4b^3$

$6a^3 - 16aab + 6abb + 4b^3$

IV.) $aa + 2ab + 2bb$ / $aa - 2ab + 2bb$

$a^4 + 2a^3b + 2aabb$

$- 2a^3b - 4aabb - 4ab^3$

$+ 2aabb + 4ab^3 + 4b^4$

$a^4 + 4b^4$.

V.)

V.) $2aa - 3ab - 4bb$
$3aa - 2ab + bb$

$6a^4 - 9a^3b - 12aabb$
$-4a^3b + 6aabb + 8ab^3$
$+2aabb - 3ab^3 - 4b^4.$

$6a^4 - 13a^3b - 4aabb + 5ab^3 - 4b^4.$

VI.) $aa + bb + cc - ab - ac - bc$
$a + b + c$

$a^3 + abb + acc - aab - aac - abc$
$-abb - acc + aab + aac - abc + b^3 + bcc - bbc$
$-abc \quad -bcc + bbc + c^3$

$a^3 - 3abc + b^3 + c^3.$

278.

Wann mehr als zwey Formeln mit einander multiplicirt werden sollen, so begreift man leicht daß nachdem man zwey davon mit einander multiplicirt, das Product nach und nach auch durch die übrigen multiplicirt werden müße, und daß es gleich viel sey, was man für eine Ordnung darin beobachtet. Es soll z. E. folgendes Product, so aus vier Factores besteht, gefunden werden:

I.	II.	III.	IV.
$(a + b)$	$(aa + ab + bb)$	$(a - b)$	$(aa - ab + bb)$

so multiplicirt man erstlich den I. und II. Factor:

II. $aa + ab + bb$
I. $a + b$

$a^3 + aab + abb$
$+ aab + ab^b + a^3$

I. II. $a^3 + 2aab + 2abb + b^3$

Hernach multiplicirt man den III. und IV. Factor:

IV. $aa - ab + bb$
III. $a - b$

$a^3 - aab + abb$
$- aab + abb - b^3$

III. IV. $a^3 - 2aab + 2abb - b^3$

Nun ist also noch übrig jenes Product I. II. mit diesem III. IV. zu multipliciren,

I. II. $= a^3 + 2aab + 2abb + b^3$
III. IV. $= a^3 - 2aab + 2abb - b^3$

$a^6 + 2a^5b + 2a^4bb + a^3b^3$
$- 2a^5b - 4a^4bb - 4a^3b^3 - 2aab^4$
$+ 2a^4bb + 4a^3b^3 + 4aab^4 + 2ab^5$
$- a^3b^3 - 2aab^4 - 2ab^5 - b^6$

$a^6 - b^6$

dieses ist nun das gesuchte Product:

279.

Laßt uns nun bey eben diesem Exempel die Ordnung verändern und erstlich die I. Formel mit der III. und so dann die II. mit der IV. multipliciren

I. $a + b$ II. $aa + ab + bb$

III. $a - b$ IV. $aa - ab + bb$

$aa + ab$ $a^4 + a^3b + aabb$

$- ab - bb$ $- a^3b - aa\,bb - ab^3$

I. III. $= aa - bb$ $+ aa\,bb + ab^3 + b^4$

II. IV. $= a^4 + aa\,bb + b^4$

Nun ist noch übrig das Product II. IV. mit dem I. III. zu multipliciren:

II. IV. $= a^4 + aa\,bb + b^4$

I. III. $= aa - bb$

$a^6 + a^4\,bb + aa\,b^4$

$- a^4\,bb - aa\,b^4 - b^6$

$a^6 - b^6$

welches das gesuchte Product ist.

280.

Wir wollen die Rechnung noch nach einer andern Ordnung anstellen und erstlich die I. Formel mit der IV. und hernach die II. mit der III. multiplici-

IV.

IV. $aa - ab + bb$ II. $aa + ab + bb$

I. $a + b$ III. $a - b$

$a^3 - aab + abb$ $a^3 + aab + abb$

$+ aab - abb + b^3$ $- aab - abb - b^3$

I. IV. $= a^3 + b^3$ II. III. $= a^3 - b^3$

Nun ist noch übrig das Product I. IV. mit II. III. zu multipliciren

I. IV. $= a^3 + b^3$

II. III. $= a^3 - b^3$

$a^6 + a^3 b^3$

$- a^3 b^3 - b^6$

$a^6 - b^6$.

281.

Es ist der Mühe werth dieses Exempel mit Zahlen zu erläutern. Es sey daher $a = 3$ und $b = 2$; so hat man $a + b = 5$ und $a - b = 1$; ferner $aa = 9$, $ab = 6$, $bb = 4$. Also ist $aa + ab + bb = 19$ und $aa - ab + bb = 7$. Folglich wird dieses Product verlangt:

5. 19. 1. 7. welches ist 665.

Es ist aber $a^6 = 729$ und $b^6 = 64$, folglich $a^6 - b^6 = 665$, wie wir schon gesehen haben.

Capi-

Capitel 4.

Von der Division mit zusammengesetzten Größen.

282.

Wann man die Division nur anzeigen, will so bedient man sich, entweder des gewöhnlichen Zeichens eines Bruchs, indem man das Dividend über die Linie und den Divisor unter die Linie schreibt: oder man schließt beyde in Klammern ein, und schreibt den Divisor nach dem Dividend mit darzwischen gesetzten zwey Punckten. Also wann a+b durch c+d getheilt werden soll, so wird der Quotient nach der ersten Art also angezeigt $\frac{a+b}{c+d}$.

Nach der andern Art aber also (a+b):(c+d); Beydes wird ausgesprochen a+b getheilt durch c+d.

283.

Wann eine zusammengesetzte Formel durch eine einfache getheilt werden soll, so wird ein jedes Glied besonders getheilt, z. E.

$6a-8b+4c$ durch 2 getheilt, giebt $3a-4b+2c$

und $(aa-2ab):(a)=a-2b:$

Eben so $(a^3-2aab+3abb):(a)=aa-2ab+3bb:$

ferner $(4aab-6aac+8abc):(2a)=2ab-3ac+4bc:$

und $(9aabc-12abbc+15abcc):(3abc)=3a-4b+5c$ etc.

284.

Wann sich etwan ein Glied des Dividends nicht theilen laßt, so wird der daher entstehende Quotient durch einen Bruch angezeigt. Also wann $a+b$ durch a getheilt werden soll, so bekommt man zum Quotient $1+\frac{b}{a}$.

Ferner $(aa-ab+bb):(aa)=1-\frac{b}{a}+\frac{bb}{aa}$.

Wann weiter $(2a+b)$ durch 2 getheilt werden soll, so bekommt man $a+\frac{b}{2}$; wobey zu mercken, daß anstatt $\frac{b}{2}$ auch geschrieben werden kann $\frac{1}{2}b$, weil $\frac{1}{2}$ mal b so viel ist als $\frac{b}{2}$. Eben so ist $\frac{b}{3}$ so viel als $\frac{1}{3}b$ und $\frac{2b}{3}$ so viel als $\frac{2}{3}b$ etc.

285.

Wann aber der Divisor selbst eine zusammen gesetzte Größe ist, so hat die Division mehr Schwierigkeit, weil dieselbe öfters würcklich geschehen kann wo es nicht zu vermuthen scheint; dann wann die Division nicht angeht so muß man sich begnügen den Quotien-

ten

ten wie oben gemeldet durch einen Bruch anzudeuten; wir wollen daher hier nur solche fälle betrachten wo die Division würcklich angeht.

286.

Es soll demnach das Dividend ac — bc durch den Divisor a — b getheilt werden: der Quotient muß demnach also beschaffen seyn, daß wann der Divisor a — b damit multiplicirt wird, das Dividend ac — bc herauskomme. Man sieht nun leicht, daß in dem Quotus c stehen muß, weil sonsten nicht ac herauskommen könnte. Um nun zu sehen ob c der völlige Quotus ist, so darf man nur den Divisor damit multipliciren und sehen ob das gantze Dividend herauskomme oder nur ein Theil deßelben? In unserm Fall aber wann a — b mit c multiplicirt wird, so bekommen wir ac — bc, welches das Dividend selbsten ist: folglich ist c der völlige Quotus. Eben so ist klar daß $(aa+ab):(a+b)=a$, und $(3aa-2ab):(3a-2b)=a$
ferner $(6aa-9ab):(2a-3b)=3a$.

287.

Auf solche Art findet man gewis einen Theil des Quotienten. Dann wann derselbe mit dem Divisor multiplicirt noch nicht das Dividend erschöpft so muß man

man das übrige gleichfals noch durch den Divisor theilen, da man dann wiederum einen Theil des Quotienten herausbringt. Solchergestallt verfährt man bis man den gantzen Quotient erhalte.

Wir wollen z. E. aa + 3ab + 2bb durch a + b theilen; da ist nun so gleich klar daß der Quotient das Glied a enthalten müße, weil sonsten nicht aa herauskommen könnte. Wann aber der Divisor a + b mit a multiplicirt wird, so kommt aa + ab, welches vom Dividend abgezogen 2ab + 2bb nachläßt, welches also noch durch a + b getheilt werden muß, wo sogleich in die Augen fällt, daß im Quotient 2b stehen müsse. Nun aber 2b mit a + b multiplicirt, giebt just 2ab + 2bb; folglich ist der gesuchte Quotient a + 2b, welcher mit dem Divisor a + b multiplicirt das Dividend giebt. Diese gantze Operation wird folgender Gestalt vorgestellt

$$
\begin{array}{l}
a+b)\,aa+3ab+2bb\,(\,a+2b \\
\quad aa+\;ab \\
\hline
\qquad +\;2ab+2bb \\
\qquad +\;2ab+2bb \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

288.

Um diese Operation zu erleichtern, so erwählt man einen Theil des Divisors, als wie hier geschehen, a, welchen man zuerst schreibt und nach diesem Buchstaben schreibt man auch das Dividend in solcher Ordnung, daß die höchsten Potestäten von eben demselben Buchstaben a zuerst gesetzt werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$
\begin{array}{l}
a-b)\,a^3-3aab+3abb-b^3\,(\,aa-2ab+bb \\
\quad a^3-\ aab \\
\quad\quad -2aab+3abb \\
\quad\quad -2aab+\ 2abb \\
\quad\quad\quad +\ abb-b^3 \\
\quad\quad\quad +\ abb-b^3 \\
\quad\quad\quad\quad\ 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
a+b)\,aa-bb\,(\,a-b & 3a-2b)\,18aa-8bb\,(\,6a+4b \\
\quad aa+ab & \quad 18aa-12ab \\
\quad -ab-bb & \quad\quad +12ab-8bb \\
\quad -ab-bb & \quad\quad +12ab-8bb \\
\quad\quad 0 & \quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

$a+b)\,a^3+b^3(aa-ab+bb$

a^3+aab

$-aab+b^3$

$-aab-abb$

$+abb+b^3$

$+abb+b^3$

0

$2a-b)\,8a^3-b^3(4aa+2ab+bb$

$8a^3-4aab$

$+4aab-b^3$

$+4aab-2abb$

$+2abb-b^3$

$+2abb-b^3$

0

$aa-2ab+bb)\,a^4-4a^3b+6aabb-4ab^3+b^4(aa-2ab+bb$

$a^4-2a^3b+aabb$

$-2a^3b+5aabb-4ab^3$

$-2a^3b+4aabb-2ab^3$

$+aabb-2ab^3+b^4$

$+aabb-2ab^3+b^4$

0

$aa-2ab+4bb)\,a^4+4aabb+16b^4(aa+2ab+4bb$

$a^4-2a^3b+4aabb$

$+2a^3b+16b^4$

$+2a^3b-4aabb+8ab^3$

$+4aabb-8ab^3+16b^4$

$+4aabb-8ab^3+16b^4$

0

$aa-2ab$

$$
\begin{array}{l}
aa-2ab+2bb)\,a^4+4b^4 \quad (aa+2ab+2bb \\
\underline{a^4-2a^3b+2aabb} \\
+2a^3b-2aabb+4b^4 \\
\underline{+2a^3b-4aabb+4ab^3} \\
+2aabb-4ab^3+4b^4 \\
\underline{+2aabb-4ab^3+4b^4} \\
0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
1-2x+xx)1-5x+10xx-10x^3+5x^4-x^5(1-3x+3xx-x^3 \\
\underline{1-2x+xx} \\
-3x+9xx-10x^3 \\
\underline{-3x+6xx-3x^3} \\
+3xx-7x^3+5x^4 \\
\underline{+3xx-6x^3+3x^4} \\
-x^3+2x^4-x^5 \\
\underline{-x^3+2x^4-x^5} \\
0
\end{array}
$$

Capitel 5.

Von der Auflösung der Brüche in unendlichen Reihen.

289.

Wann sich das Dividend durch den Divisor nicht theilen läßt, so wird der Quotient, wie schon oben gezeigt, durch einen Bruch ausgedrückt.

Also wann 1 durch 1 — a getheilt werden soll, so bekommt man diesen Bruch $\frac{1}{1-a}$. Inzwischen kann doch die Division nach den vorhergehenden Reguln angestellt und so weit man will fortgesetzt werden, da dann immer der wahre Quotus, ob gleich in verschiedenen Formen, herauskommen muß.

290.

Um dieses zu zeigen so laßt uns das Dividend 1, würcklich durch den Divisor 1 — a theilen wie folget:

1 — a) 1 (1 + $\frac{a}{1-a}$ oder 1 — a) 1 (1 + a + $\frac{aa}{1-a}$

+ 1 — a

Rest + a

+ 1 — a

+ a

+ a — aa

Rest + aa

Um

Um noch mehr Formen zu finden, so theile man aa durch 1 — a als

$$1-a)\,aa\,(aa+\frac{a^3}{1-a}$$
$$\underline{aa-a^3}$$
$$+a^3$$

ferner $1-a)\,a^3\,(a^3+\frac{a^4}{1-a}$
$$\underline{a^3-a^4}$$
$$+a^4$$

ferner $1-a)\,a^4\,(a^4+\frac{a^5}{1-a}$
$$\underline{a^4-a^5}$$
$$+a^5 \text{ etc.}$$

291.

Hieraus ersehen wir, daß der Bruch $\frac{1}{1-a}$ durch alle folgende Formen ausgedruckt werden kann

I.) $1+\frac{a}{1-a}$, II.) $1+a+\frac{aa}{1-a}$,

III.) $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$, IV.) $1+a+aa+a^3+\frac{a^4}{1-a}$,

V.) $1+a+aa+a^3+a^4+\frac{a^5}{1-a}$ etc.

Man betrachte die erste Form $1+\frac{a}{1-a}$. Nun ist 1, so viel als $\frac{1-a}{1-a}$: folglich $1+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a}{1-a}+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a+a}{1-a}=\frac{1}{1-a}$.

Für die zweyte Form $1+a+\frac{aa}{1-a}$ bringe man den gantzen Theil $1+a$ auch zum Nenner $1-a$, so bekommt man $\frac{1-aa}{1-a}$, darzu $\frac{+aa}{1-a}$ giebt $\frac{1-aa+aa}{1-a}$, das ist $\frac{1}{1-a}$.

Für die dritte Form $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$ giebt der gantze Theil zum Nenner $1-a$ gebracht $\frac{1-a^3}{1-a}$, darzu der

Bruch $\frac{a^3}{1-a}$ macht $\frac{1}{1-a}$; woraus erhellet, daß alle diese Formen in der That so viel sind als der vorgegebene Bruch $\frac{1}{1-a}$.

292.

Man kann daher solcher Gestalt so weit fortgehen als man will, ohne daß man weiter nöthig habe zu rechnen. Also wird seyn $\frac{1}{1-a} = 1 + a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \frac{a^8}{1-a}$. Man kann auch so gar immer weiter fortgehen, ohne jemals aufzuhören, und dadurch wird der vorgelegte Bruch $\frac{1}{1-a}$ in eine unendliche Reihe aufgelöst, welche ist:

$1 + a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12}$ etc.

ins unendliche. Und von dieser unendlichen Reihe kann man mit recht behaupten, daß ihr Werth eben so viel sey, als der Bruch $\frac{1}{1-a}$.

293.

Dieses scheinet anfänglich sehr wunderbar; jedoch wird es durch die Betrachtung einiger Fälle begreiflich werden: Es sey erstlich $a = 1$, so wird unsere Reihe $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ etc. bis ins unendliche, welche dem Bruch $\frac{1}{1-1}$, das ist $\frac{1}{0}$ gleich seyn soll. Wir haben aber schon oben bemercket, daß $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl sey, und dieses wird hier von neuem auf das schönste bestätiget.

Wann

Wann man aber setzt $a = 2$ so wird unsere Reihe $= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$ etc. bis ins unendliche, deren Werth seyn soll $\frac{1}{1-2}$, das ist $\frac{1}{-1} = -1$; welches dem ersten Anblick nach ungereimt scheint.

Es ist aber zu mercken, daß wann man irgendwo in obiger Reihe will stehen bleiben, darzu allezeit noch ein Bruch gesetzt werden muß.

Also wann wir z. E. bey 64 still stehen, so müßen wir zu $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$ noch diesen Bruch $\frac{128}{1-2}$, das ist $\frac{128}{-1} = -128$ hinzusetzen, woraus ensteht $127 - 128$, das ist -1.

Geht man aber ohne Ende fort, so fällt der Bruch zwar weg, man stehet aber hingegen auch niemals still.

294.

Dieses ist demnach zu beobachten, wann für a größere Zahlen als als 1 angenommen werden. Nimmt man aber für a kleinere Zahlen, so läßt sich alles leichter begreifen.

Es sey z. E. $a = \frac{1}{2}$ so bekommt man $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, welches folgender Reihe gleich seyn wird:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$ etc. ohne Ende. Dann nimmt man nur zwey Glieder so hat man $1 + \frac{1}{2}$, und so fehlt noch $\frac{1}{2}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $1\frac{3}{4}$, fehlt noch $\frac{1}{4}$: nimmt man vier Glieder so hat man $1\frac{7}{8}$, fehlt noch $\frac{1}{8}$: woraus man sieht, daß immer weniger fehlt, folglich wann man unendlich weit fortgeht, so muß gar nichts fehlen.

295.

Man setze $a = \frac{1}{3}$ so wird unser Bruch $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$ $= \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1\frac{1}{2}$, welchem dahero folgende Reihe gleich ist $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ etc. bis ins unendliche. Nimmt man zwey Glieder so hat man $1\frac{1}{3}$, fehlt noch $\frac{1}{6}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $1\frac{4}{9}$ fehlt noch $\frac{1}{18}$. Nimmt man vier Glieder so hat man $1\frac{13}{27}$, fehlt noch $\frac{1}{54}$. Da nun der Fehler immer dreymal kleiner wird, so muß derselbe endlich verschwinden.

296.

Laßt uns setzen $a = \frac{2}{3}$ so wird der Bruch $\frac{1}{1-a}$ $= \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$, die Reihe aber wird:

$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243}$ etc, bis ins unendliche.

Nimmt man erstlich $1\frac{2}{3}$ so fehlt noch $1\frac{1}{3}$.
nimmt man drey Glieder $2\frac{1}{9}$ so fehlt noch $\frac{8}{9}$.
nimmt man vier Glieder $2\frac{11}{27}$ so fehlt noch $\frac{16}{27}$. 297.

297.

Es sey $a = \frac{1}{4}$ so wird der Bruch $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}}$ $= 1\frac{1}{3}$, die Reihe aber wird $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ etc. Nimmt man zwey Glieder $1\frac{1}{4}$ so fehlt noch $\frac{1}{12}$; nimmt man drey Glieder so hat man $1\frac{5}{16}$ fehlt noch $\frac{1}{48}$ etc.

298.

Auf gleiche Weise kann auch dieser Bruch $\frac{1}{1+a}$ in eine unendliche Reihe aufgelöset werden, wann man den Zehler 1 durch den Nenner $1+a$ würcklich dividirt, wie folget:

$$
\begin{array}{l}
1+a \;)\; 1 \;\; (1 - a + aa - a^3 + a^4 \\
\underline{1+a} \\
\quad -a \\
\quad \underline{-a-aa} \\
\quad\quad +aa \\
\quad\quad \underline{+aa+a^3} \\
\quad\quad\quad -a^3 \\
\quad\quad\quad \underline{-a^3-a^4} \\
\quad\quad\quad\quad +a^4 \\
\quad\quad\quad\quad \underline{+a^4+a^5} \\
\quad\quad\quad\quad\quad -a^5 \text{ etc.}
\end{array}
$$

Dahero ist unser Bruch $\frac{1}{1+a}$ gleich dieser unendlichen Reihe:

$$1 - a + aa - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - a^7 \text{ etc.}$$

299.

Setzt man $a = 1$ so erhält man diese merckwürdige Vergleichung:

$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ etc. bis ins unendliche; welches wiedersinnig scheint: dann wann man irgendwo mit -1 aufhört, so giebt diese Reihe 0; hört man irgend aber mit $+1$ auf, so giebt dieselbe 1. Allein eben hieraus läßt sich die Sache begreiffen, weil wann man ohne End fort gehen und weder bey -1 noch $+1$ irgendwo aufhören muß, so kann weder 1 noch 0 herauskommen sondern etwas darzwischen welches $\frac{1}{2}$ ist.

300.

Es sey ferner $a = \frac{1}{2}$ so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, welchen folglich gleich seyn wird diese Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ etc. ohne Ende. Nimmt man zwey Glieder so hat man $\frac{1}{2}$, ist zu wenig um $\frac{1}{6}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $\frac{3}{4}$, ist zu viel um $\frac{1}{12}$: nimmt man vier Glieder so hat man $\frac{5}{8}$, ist zu wenig um $\frac{1}{24}$ etc.

301.

301.

Setzt man $a = \frac{1}{3}$ so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$, welchem folglich diese Reihe wird gleich seyn $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \frac{1}{729}$ etc. ohne Ende. Nimmt man zwey Glieder so hat man $\frac{2}{3}$, ist zu wenig um $\frac{1}{12}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $\frac{7}{9}$, ist zu viel um $\frac{1}{36}$. Nimmt man vier Glieder so hat man $\frac{20}{27}$, ist zu wenig um $\frac{1}{108}$, und so fort.

302.

Man kann den Bruch $\frac{1}{1+a}$ auf noch eine andre Art auflösen, indem man 1 durch $a+1$ theilt, nemlich:

$a+1) 1 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{aa} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} \text{ etc.}\right.$

$1 + \frac{1}{a}$

$- \frac{1}{a}$

$- \frac{1}{a} - \frac{1}{aa}$

$+ \frac{1}{aa}$

$+ \frac{1}{aa} + \frac{1}{a^3}$

$- \frac{1}{a^3}$

$- \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4}$

$+ \frac{1}{a^4}$

$+ \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5}$

$- \frac{1}{a^5}$ etc.

Folglich

Folglich ist unser Bruch $\frac{1}{a+1}$ dieser Reihe gleich $\frac{1}{a} - \frac{1}{aa} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} - \frac{1}{a^6}$ etc. ohne Ende: Setzt man $a = 1$ so bekommt man diese Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1$ etc. $= \frac{1}{2}$ wie oben: Setzt man $a = 2$ so bekommt man diese Reihe $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$ etc.

303.

Auf gleiche Weise kann man auf eine allgemeine Art diesen Bruch $\frac{c}{a+b}$ in einer Reihe auflösen,

$$a+b)\,c\ \left(\frac{c}{d} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4}\right.\text{ etc.}$$

$$\begin{array}{l} c + \frac{bc}{a} \\ \hline -\frac{bc}{a} \\ \quad -\frac{bc}{a} - \frac{bbc}{aa} \\ \hline \quad +\frac{bbc}{aa} \\ \quad +\frac{bbc}{aa} + \frac{b^3c}{a^3} \\ \hline \quad -\frac{b^3c}{a^3} \end{array}$$

Woraus

Woraus wir diese Vergleichung erhalten $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4}$ bis ins unendliche:

Es sey a = 2, b = 4, und c = 3 so haben wir $\frac{c}{a+b}$

$\frac{3}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 3 + 6 - 12$ etc.

Es sey a = 10, b = 1 und c = 11 so haben wir $\frac{c}{a+b} = \frac{11}{10+1}$

$= 1 = \frac{11}{10} - \frac{11}{100} + \frac{11}{1000} - \frac{11}{10000}$ etc.

Nimmt man nur ein Glied, so hat man $\frac{11}{10}$ welches zu viel um $\frac{1}{10}$. Nimmt man zwey Glieder so hat man $\frac{99}{100}$, welches zu wenig um $\frac{1}{100}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $\frac{1001}{1000}$, ist zu viel um $\frac{1}{1000}$ etc.

304.

Wann der Divisor aus mehr Theilen besteht, so kann die Division gleicher Gestalt ins unendliche fortgesetzt werden.

Als wann dieser Bruch $\frac{1}{1-a+aa}$ vorgegeben wäre, so wird die unendliche Reihe, so demselben gleich ist also gefunden:

$1 - a$

$1-a+aa) \; 1 \; (1+a-a^3-a^4+a^6+a^7$ etc.

$1-a+aa$

$+a-aa$

$+a-aa+a^2$

$-a^3$

$-a^3+a^4-a^5$

$-a^4+a^5$

$-a^4+a^5-a^6$

$+a^6$

$+a^6-a^7+a^8$

$+a^7-a^8$

$+a^7-a^8+a^9$

$-a^9$ etc.

Dahero haben wir diese Vergleichung $\frac{1}{1-a+aa} = 1+a-a^3-a^4+a^6+a^7-a^9-a^{10}$ etc. ohne Ende Nimmt man hier $a = 1$ so bekommt man diese Reihe $1 = 1+1-1-1+1+1-1-1+1+1$ etc. welche Reihe die schon oben gefundene $1-1+1-1+1$ etc. gedoppelt in sich enthält, da nun die obige Reihe dem $\frac{1}{2}$ gleich war, so ist kein Wunder daß diese $\frac{2}{2}$ daß ist 1 ausmacht.

Setzt man $a = \frac{1}{2}$ so bekommt man diese Gleichung $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\frac{1}{512}$ etc. Setzt

man

man $a = \frac{1}{3}$ so bekommt man diese Gleichung, als $\frac{\frac{1}{7}}{9}$ oder $\frac{9}{7} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{729}$ etc. Nimmt man hier vier Glieder so bekommt man $\frac{104}{81}$ welches kleiner ist als $\frac{9}{7}$ um $\frac{1}{567}$.

Man setze ferner $a = \frac{2}{3}$ so bekommt man diese Gleichung $\frac{\frac{1}{7}}{9} = \frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{3} - \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + \frac{64}{729}$ etc. welche Reihe der vorigen gleich seyn muß; man subtrahire also die obere von dieser so bekommt man:

$0 = \frac{1}{3} - \frac{7}{27} - \frac{15}{81} + \frac{63}{729}$ etc. welche vier Glieder machen $-\frac{2}{81}$.

305.

Solcher gestalt kann man alle Brüche in unendliche Reihen auflösen, welches nicht nur öfters sehr großen Nutzen schaft, sondern auch an sich selbst höchst merckwürdig ist, daß eine unendliche Reihe, ohngeacht dieselbe niemals aufhört, dennoch einen bestimmten Werth haben könne. Es sind auch die wichtigsten Erfindungen aus diesem Grunde hergeleitet worden, dahero diese Materie allerdings verdient mit der größten Aufmerckſamkeit in Erwegung gezogen zu werden.

Capitel

Capitel 6.

Von den Quadraten der zusammengesetzten Größen.

306.

Wann das Quadrat von einer zusammengesetzten Größe gefunden werden soll, so darf man dieselbe nur mit sich selbsten multipliciren, uud das Product wird das Quadrat davon seyn.

Also wird das Quadrat von a + b gefunden, wie folget:

$$\begin{array}{r} a+b \\ \hline a+b \\ \hline aa+ab \\ \hline +ab+bb \\ \hline aa+2ab+bb \end{array}$$

307.

Wann dahero die Wurzel aus zwey Theilen besteht, die zusammen addirt sind, als a + b, so besteht das Quadrat I. aus den Quadraten eines jeden Theils nemlich aa und bb, II. kommt aber noch hinzu das dop-

pelte

pelte Product der beyden Theile nemlich 2ab, und die gantze Summa aa + 2ab + bb ist das Quadrat von a + b.

Es sey z. E. a = 10 und b = 3, also daß das Quadrat von 13 gefunden werden soll; solches wird demnach seyn = 100 + 60 + 9 = 169.

308.

Durch Hülfe dieser Formel laßen sich nun leicht die Quadraten von ziemlich großen Zahlen finden, wann dieselben in zwey Theile zergliedert werden.

Also um das Quadrat von 57 zu finden so zertheile man diese Zahl in 50 + 7; daher das Quadrat seyn wird:

2500 + 700 + 49 = 3249.

309.

Hieraus sieht man, daß das Quadrat von a + 1 seyn werde aa + 2a + 1; da nun das Quadrat von a ist aa, so wird das Quadrat von a + 1 gefunden wann man zu jenem addirt 2a + 1, wobey zu mercken daß 2a + 1 die Summa der beyden Wurzeln a und a + 1 ist; da also das Quadrat von 10 ist 100 so wird das Quadrat von 11 seyn = 100 + 21, und da das

Quadrat von 57 ist 3249, so wird das Quadrat von 58 seyn = 3249 + 115 = 3364. Und ferner das Quadrat von 59 = 3364 + 117 = 3481. Noch ferner das Quadrat von 60 = 3481 + 119 = 3600 etc.

310.

Das Quadrat einer zusammengesetzten Größe, als $a + b$, wird also angedeutet $(a + b)^2$; dahero haben wir $(a + b)^2 = aa + 2ab + bb$, woraus folgende Gleichungen hergeleitet worden:

$(a + 1)^2 = aa + 2a + 1$, $(a + 2)^2 = aa + 4a + 4$
$(a + 3)^2 = aa + 6a + 9$, $(a + 4)^2 = aa + 8a + 16$,
und so ferner.

311.

Wann die Wurzel ist $a - b$ so wird ihr Quadrat seyn $= aa - 2ab + bb$, welches dahero aus den Quadraten beyder Theile besteht, wovon aber das doppelte Product muß weggenommen werden.
Es sey z. E. $a = 10$ und $b = 1$ so wird daß Quadrat von 9 seyn $= 100 - 20 + 1 = 81$.

312.

Da wir nun diese Gleichung haben $(a - b)^2 = aa - 2ab + bb$, so wird seyn $(a - 1)^2 = aa - 2a + 1$; das

Das Quadrat von a—1 wird also gefunden, wann man von aa subtrahirt 2a—1, welches die Summa der beyden Wurzeln a und a — 1 ist.

Es sey z. E. $a = 50$ so ist $aa = 2500$ und $a - 1 = 49$, dahero $49^2 = 2500 - 99 = 2401$.

313.

Dieses läßt sich auch durch Brüche erläutern, dann wann man vor die Wurzel nimmt $\frac{3}{5} + \frac{2}{5}$ [welches 1 ausmacht] so wird das Quadrat seyn:

$\frac{9}{25} + \frac{4}{25} + \frac{12}{25} = \frac{25}{25}$ das ist 1.

Ferner das Quadrat von $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ [welches $\frac{1}{6}$ ist] wird seyn $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{36}$.

314.

Wann die Wurzel aus mehr Gliedern besteht, so läßt sich das Quadrat auf gleiche Art bestimmen: Also von $a + b + c$ wird das Quadrat gefunden, wie folget:

$$\begin{array}{r} a + b + c \\ a + b + c \\ \hline aa + ab + ac \qquad + bc \\ + ab + ac + bb + bc + cc \\ \hline aa + 2ab + 2ac + bb + 2bc + cc \end{array}$$

woraus man sieht, daß dasselbe erstlich aus dem Quadrat eines jeden Theils der Wurzel und hernach aus dem doppelten Product von je zwey Theilen mit einander besteht.

315.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern so wollen wir die Zahl 256 in diese drey Theile zertheilen $200+50+6$; dahero das Quadrat davon aus folgenden Theilen zusammengesetzt seyn wird;

40000	256
2500	256
36	1536
20000	1280
2400	512
600	65536
65536	

und dieses ist dem 256. 256 offenbahr gleich

316.

Wann einige Glieder in der Wurzel negativ sind, so wird das Quadrat nach eben dieser Regul gefunden, wann man nur bey den doppelten Producten Achtung giebt was für ein Zeichen einem jeden zukommt.

Also von $a-b-c$ wird das Quadrat seyn:

$aa+bb+$

aa + bb + cc − 2ab − 2ac + 2bc. Wann also die Zahl 256 also vorgestellet wird 300 − 40 − 4, so bekömmt man.

Positive Theile	Negative Theile,
+ 90000	− 24000
1600	2400
320	− 26400
16	
+ 91936	
− 26409	
65536. Quadrat von 256, wie oben.	

Capitel 7.

Von der Ausziehung der Quadrat-Wurzel in zusammengesetzten Größen.

317.

Um hiervon eine sichere Regul zu geben, so müßen wir das Quadrat von der Wurzel a + b, welches ist aa + 2ab + bb genau in Erwegung ziehen, und suchen wie man hinwiederum aus dem ge-

gegebenen Quadrat die Wurzel herausbringen könne. Worüber folgende Betrachtungen anzustellen sind.

318.

Erstlich da das Quadrat aa + 2ab + bb aus mehrern Gliedern besteht, so ist gewiß, daß auch die Wurzel aus mehr als einem Gliede bestehen müße: und wann das Quadrat so geschrieben wird, daß die Potestäten von einem Buchstaben, als a, immer abnehmen, so ist klar daß das erste Glied das Quadrat seyn werde von dem ersten Glied der Wurzel. Da nun in unserm Fall das erste Glied des Quadrats aa ist, so ist offenbahr, daß das erste Glied der Wurzel seyn müße a.

319.

Hat man nun das erste Glied der Wurzel, nemlich a gefunden, so betrachte man das übrige im Quadrat, welches ist 2ab + bb, um zu sehen wie man daraus den andern Theil der Wurzel, welcher ist b, finden könne. Hiebey bemercken wir, daß jenes übrige oder jener Rest 2ab + bb also durch ein Product vorgestellet werden könne (2a + b)b. Da nun dieser Rest zwey Factores hat 2a + b und b so wird der letztere b, das ist der zwey Theil der Wurzel gefunden, wann man den Rest 2ab + bb durch 2a + b dividirt,

320.

320.

Um also den zweyten Theil der Wurzel zu finden, so muß man den Rest durch 2a + b dividiren, da dann der Quotient der zweyte Theil der Wurzel seyn wird. Bey dieser Division aber ist zu mercken, daß 2a das Doppelte ist von dem schon gefundenen ersten Theil der Wurzel a: das andre Glied b aber ist zwar noch unbekannt, und muß seine Stelle noch ledig gelaßen werden; doch kann man gleichwohl die Division vornehmen, indem dabey nur auf das erste Glied 2a gesehen wird. So bald man aber den Quotient gefunden, welcher hier b ist, so muß man denselben auch an die ledige Stelle setzen und die Division vollenden.

321.

Die Rechnung also wodurch aus obigem Quadrat aa + 2ab + bb die Wurzel gefunden wird, kann also vorgestellt werden:

$$\begin{array}{l|l} aa + 2ab + bb & a + b \\ aa & \\ \hline 2a + b & + 2ab + bb \\ & + 2ab + bb \\ \hline & 0 \end{array}$$

322.

Auf solche Art kann auch die Quadrat-Wurzel aus andern zusammengesetzten Formeln, wann dieselben

ben nur Quadrate sind, gefunden werden, wie aus fol=
benden Exempeln zu ersehen; als:

$$aa+6ab+9bb(a+3b \qquad 4aa-4ab+bb(2a-b$$

$$\begin{array}{r|l} 2a+3b & +6ab+9bb \\ & +6ab+9bb \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4a-b & -4ab+bb \\ & -4ab+bb \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$9pp+24pq+16qq)3p+4q$$

$$\begin{array}{r|l} 6p+4q & +24pq+16qq \\ & +24pq+16qq \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$25xx-60x+36)5x-6$$

$$\begin{array}{r|l} 10x-6 & -60x+36 \\ & -60x+36 \\ \hline & 0 \end{array}$$

323.

Wann bey der Division noch ein Rest übrig bleibt, so ist es ein Zeichen, daß die Wurzel aus mehr als 2 Gliedern besteht. Alsdann werden die zwey schon gefundenen Glieder zusammen als der erste Theil betrachtet, und aus dem Rest auf gleiche Weise wie vorher das folgende

gende Glied der Wurzel gefunden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen;

$$aa+2ab-2ac-2bc+bb+cc \;(\; a+b-c$$
$$aa$$
$$2a+b \;|\; +2ab-2ac-2bc+bb+cc$$
$$+2ab+bb$$
$$2a+2b-c \;|\; -2ac-2bc+cc$$
$$-2ac-2bc+cc$$

$$a^4+2a^3+3aa+2a+1 \;(\; aa+a+1$$
$$a^4$$
$$2aa+a \;|\; +2a^3+3aa$$
$$+2a^3+aa$$
$$2aa+2a+1 \;|\; +2aa+2a+1$$
$$+2aa+2a+1$$

$$a^4-4a^3b+8ab^3+4b^4 \;(\; aa-2ab-2bb$$
$$a^4$$
$$2aa-2ab \;|\; -4a^3b+8ab^3$$
$$-4a^3b+4aabb$$
$$2aa-4ab-2bb \;|\; -4aabb+8ab^3+4b^4$$
$$-4aabb+8ab^3+4b^4$$

$a^6 - 6a^5b + 15a^4bb - 20a^3b^3 + 15aab^4 - 6ab^5 + b^6 (a^3 - 3aab + 3abb - b^3$

a^6

$2a^3 - 3aab$	$-6a^5b + 15a^4bb$
	$-6a^5b + 9a^4bb$
$2a^3 - 6aab + 3abb$	$+6a^4bb - 20a^3b^3 + 15aab^4$
	$+6a^4bb - 18a^3b^3 + 9aab^4$
$2a^3 - 6aab + 6abb - b^3$	$-2a^3b^3 + 6aab^4 - 6ab^5 + b^6$
	$-2a^3b^3 + 6aab^4 - 6ab^5 + b^6$

0

324.

Aus dieser Regul folgt nun leicht diejenige, welche in den Rechen Büchern für die Ausziehung der Quadrat-Wurzel gegeben wird; als:

5	29	23,	
4			
43	129		
	129		
	0		

17	64	42,	
16			
82	164		
	164		
	0		

23	04	48,	
16			
88	704		
	704		
	0		

40	96	64.	
36			
124	496		
	496		
	0		

96	04	98,	
81			
188	1504		
	1504		
	0		

1	56	25	125,	
1				
22	56			
	44			
245	1225			
	1225			
	0			

99	80	01	999,	
81				
189	1880			
	1701			
1989	17901			
	17901			
	0			

325.

Wann aber bey der Operation zuletzt etwas übrig bleibt, so ist solches ein Zeichen daß die vorgelegte Zahl

Zahl kein Quadrat ist und also die Wurzel davon nicht angegeben werden kann. In solchen Fällen bedient man sich des oben gebrauchten Wurzel-Zeichens welches vor die Formel geschrieben, die Formel selbst aber in Klammern eingeschloßen wird. Also wird die Quadrat-Wurzel von $aa+bb$ auf diese Weise angedeutet, $\sqrt{(aa+bb)}$; und $\sqrt{(1-xx)}$ deutet an die Quadrat-Wurzel aus $1-xx$. Statt dieses Wurzel-Zeichens kann man auch den gebrochenen Exponenten $\frac{1}{2}$ gebrauchen. Also wird auch durch $(aa+bb)^{\frac{1}{2}}$ die Quadrat-Wurzel aus $aa+bb$ angedeutet.

Capitel 8.

Von der Rechnung mit Irrational-Zahlen.

326.

Wann zwey oder mehr Irrational Formeln zusammen addirt werden sollen, so geschieht solches wie oben gelehret worden, indem man alle Glieder mit ihren Zeichen zusammenschreibt. Nur ist bey dem Abkür-

kürtzen zu bemercken, daß anstatt $\sqrt{a} + \sqrt{a}$ geschrieben werde $2\sqrt{a}$, und daß $\sqrt{a} - \sqrt{a}$ einander aufhebe oder nichts gebe. Also diese Formel $3 + \sqrt{2}$ und $1 + \sqrt{2}$ zusammen addirt giebt $4 + 2\sqrt{2}$ oder $4 + \sqrt{8}$: ferner $5 + \sqrt{3}$ und $4 - \sqrt{3}$ zusammen addirt, giebt 9: ferner $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ und $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ zusammen addirt, macht $3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$.

327.

Eben so wenig Schwierigkeit hat die Subtraction indem nur die Zeichen der untern Zahl, welche subtrahirt werden soll, verkehrt gelesen werden müssen, wie aus folgendem Exempel zu ersehen.

$$\begin{array}{r} 4 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + 4\sqrt{6} \\ 1 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{5} + 6\sqrt{6} \\ \hline 3 - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{6} \end{array}$$

328.

Bey der Multiplication ist nur zu mercken, daß $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{a}$ multiplicirt a giebt. Wann aber ungleiche Zahlen hinter dem $\sqrt{}$ Zeichen stehen, so giebt $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt $\sqrt{ab}$, woraus folgende Exempel berechnet werden können:

$$\begin{array}{r} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} \\ +\sqrt{2}+2 \\ \hline 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4+2\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \\ \hline 8+4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2}-4 \\ \hline 8-4=4. \end{array}$$

329.

Eben dieses gilt auch von den unmöglichen Grösen ; wobey nur zu mercken daß $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt $-a$ giebt.

Wann man den Cubus von $-1+\sqrt{-3}$ suchen sollte so geschähe solches wann man erstlich das Quadrat nimmt und dasselbe nochmahls mit der Zahl $-1+\sqrt{-3}$ multipliciret wie folgt

$$\begin{array}{r} -1+\sqrt{-3} \\ -1+\sqrt{-3} \\ \hline +1-\sqrt{-3} \\ -\sqrt{-3}-3 \\ \hline +1-2\sqrt{-3}-3-3= \end{array} \quad \begin{array}{r} -2-2\sqrt{-3} \\ -1+\sqrt{-3} \\ \hline +2+2\sqrt{-3} \\ -2\sqrt{-3}+6 \\ \hline 2+6=8 \end{array}$$

330.

330.

Bey der Division hat man nur nöthig schlechweg einen Bruch zu setzen und alsdann kann man denselben in eine andere Form verwandeln, so daß der Nenner rational wird. Dann wann der Nenner ist $a+\sqrt{b}$ und man oben und unten mit $a-\sqrt{b}$, multiplicirt so wird der neue Nenner seyn $aa-b$ und hat also kein Wurzel-Zeichen mehr. Man dividire z. E. $3+2\sqrt{2}$ durch $1+\sqrt{2}$ so hat man $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. Jetzt multiplicire man oben und unten mit $1-\sqrt{2}$ so bekommt man für den Zehler

$$\begin{array}{r} 3+2\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ \hline -3\sqrt{2}-4 \\ 3-\sqrt{2}-4 \end{array} = -\sqrt{2}-1$$

für den Nenner

$$\begin{array}{r} 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ \hline -\sqrt{2}-2 \\ 1-2 \end{array} = -1$$

Also ist unser neuer Bruch $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$. Man multiplicire ferner oben und unten mit -1 so bekommt man vor den Zehler $+\sqrt{2}+1$ und vor den Nenner $+1$.

Es ist $+\sqrt{2}+1$ aber eben so viel als $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; dann $\sqrt{2}+1$ mit dem Divisor $1+\sqrt{2}$ multiplicirt

$$\begin{array}{r} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} \\ +\sqrt{2}+2 \\ \hline \text{giebt } 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2} \end{array}$$

Ferner $8-5\sqrt{2}$ durch $3-2\sqrt{2}$ dividirt giebt $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$. Man multiplicire oben und unten mit $3+2\sqrt{2}$ so bekommt man für den Zehler

$$\begin{array}{r} 8-5\sqrt{2} \\ 3+2\sqrt{2} \\ \hline 24-15\sqrt{2} \\ +16\sqrt{2}-20 \\ \hline 24+\sqrt{2}-20=4+\sqrt{2} \end{array}$$

und für den Nenner $3-2\sqrt{2}$

$$\begin{array}{r} 3+2\sqrt{2} \\ \hline 9-6\sqrt{2} \\ +6\sqrt{2}-4.2 \\ \hline 9-8=+1 \end{array}$$

Folglich ist der Quotient $4+\sqrt{2}$. Die Probe stehet also:

$$\begin{array}{r} 4+\sqrt{2} \\ \underline{3-2\sqrt{2}} \\ 12+3\sqrt{2} \\ \underline{-8\sqrt{2}-4} \\ 12-5\sqrt{2}-4=8-5\sqrt{2}. \end{array}$$

331.

Auf solche weise können dergleichen Brüche immer in andre verwandelt werden, wo der Nenner rational ist. Also dieser Bruch $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$, wann man oben und unten mit $5-2\sqrt{6}$ multiplicirt, so wird solcher in diesen verwandelt $\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5-2\sqrt{6}$.

Ferner dieser Bruch $\frac{2}{-1+\sqrt{-3}}$ wird verwandelt in diesen $\frac{2+2\sqrt{-3}}{-4}=\frac{1+\sqrt{-3}}{-2}$ ferner $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{11+2\sqrt{30}}{1}$ $=11+2\sqrt{30}$.

332.

Wann in dem Nenner auch mehr Glieder vorkommen, so wird auf eben diese Art nach und nach die Irrationalitet aus dem Nenner weggebracht.

Also bey diesem Bruch $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ multiplicirt man erstlich oben und unten mit $\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, so hat man, $\frac{+\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$: man multipliret ferner oben und unten mit $5+2\sqrt{6}$, so hat man $5\sqrt{10}+11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+2\sqrt{60}$.

Capitel 9.

Von den Cubis und von der Ausziehung der Cubic-Wurzel.

333.

Um den Cubus von der Wurzel $a+b$ zu finden, muß man das Quadrat davon, welches ist $aa+2ab+bb$, nochmahls mit $a+b$ multipliciren, da dann der Cubus seyn wird

$$\begin{array}{r} aa+2ab+bb \\ a+b \\ \hline a^3+2aab+abb \\ +aab+2abb+b^3 \\ \hline a^3+3aab+3abb+b^3 \end{array}$$

Derselbe

Derselbe besteht also aus den Cubis beyder Theile der Wurzel, hernach noch aus 3 aab + 3 abb, welches so viel ist als (3 ab). (a + b); und dieses ist das dreyfache Product der beyden Theile mit der Summa derselben multiplicirt.

334.

Wann also die Wurzel aus zwey Theilen besteht, so läßt sich der Cubus nach dieser Regul leicht finden: als z. E. da die Zahl 5 = 3 + 2, so ist der Cubus davon = 27 + 8 + 18. 5 ist also = 125.

Es sey ferner die Wurzel 7 + 3 = 10, so wird der Cubus seyn 343 + 27 + 63. 10 = 1000.

Um den Cubus von 36 zu finden, so setze man die Wurzel 36 = 30 + 6 und der Cubus wird seyn:

27000 + 216 + 540. 36 = 46656.

335.

Wann aber umgekehrt der Cubus gegeben ist, nemlich $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, und man soll davon die Wurzel finden, so ist folgendes zu bemercken.

Erstlich wann der Cubus nach der Potestät eines Buchstaben ordentlich geschrieben wird, so er-

kennt man aus dem ersten Glied a^3 so gleich das erste Glied der Wurzel a, deßen Cubus jenem gleich ist, und wann man denselben wegnimmt so behält man diesen Rest: $3aab + 3abb + b^3$, aus welchen das zweyte Glied der Wurzel gefunden werden muß.

336.

Da wir nun schon wißen, daß das zweyte Glied $+b$ ist, so kommt es hier nur darauf an, wie daßelbe aus dem obigen Rest gefunden werden könne. Es läßt sich aber derselbe Rest also durch zwey Factores ausdrucken $(3aa + 3ab + bb).(b)$; wann man also den Rest durch $3aa + 3ab + bb$ dividirt, so erhält man das verlangte zweyte Glied der Wurzel nemlich $+b$.

337.

Weil aber das zweyte Glied noch nicht bekannt ist, so ist auch der Theiler noch unbekannt: Allein es ist genung, daß wir den ersten Theil dieses Theilers haben, welcher ist $3aa$ oder das dreyfache Quadrat des ersten schon gefundenen Theils der Wurzel, und daraus läßt sich schon der andre Theil b finden, wor-

aus

aus hernach der Divisor vollständig gemacht werden muß, ehe man die Division vollendet. Man muß dahero alsdann zu 3aa noch hinzufügen 3ab, das ist das drey fache Product des ersten Theils mit dem andern, und hernach bb, das ist das Quadrat des andern Theils der Wurzel.

338.

Es sey z. E. gegeben dieser Cubus

$$a^3 + 12aa + 48a + 64 \,(\, a + 4$$

$$a^3$$

$$3aa + 12a + 16 \;\Big|\; +12aa + 48a + 64$$
$$+12aa + 48a + 64$$

0

Es sey ferner gegeben dieser Cubus

$$a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \,(\, aa - 2a + 1$$

$$a^6$$

$$3a^4 - 6a^3 + 4aa \;\Big|\; -6a^5 + 15a^4 - 20a^3$$
$$-6a^5 + 12a^4 - 8a^3$$

$$3a^4 - 12a^3 + 12aa + 3aa - 6a + 1 \;\Big|\; 3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1$$
$$3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1$$

0

339.

Hierauf gründet sich auch die gemeine Regul die Cubic-Wurzeln aus Zahlen zu finden. Als mit der Zahl 2197 wird die Rechnung allso angestellet

2197(10+3=13
1000
300 | 1197
90 |
9 |
399 | 1197
0

Es sey ferner gegeben der Cubus 34965783 woraus die Cubic-Wurzel gefunden werden soll.

34 965 783(300+20+7=327
28 000 000
270000 | 7 965 783
18000 |
400 |
288400 | 5768000
307200 | 2197783
6720 |
49 |
313969 | 2197783
0

Capitel

Capitel 10.

Von den höhern Potestäten zusammengesetzter Größen.

340.

Nach den Quadraten und Cubis folgen die höhern Potestäten, welche durch Exponente wie schon oben gemeldet worden, pflegen angezeigt zu werden: nur muß man die Wurzel wann sie zusammengesetzt ist in Klammern einschließen. Also $(a+b)^5$ deutet die fümfte Potestät von $a+b$ an, und $(a-b)^6$ deutet die sechste Potestät an von $a-b$. Wie aber diese Potestäten entwickelt werden können, soll in diesem Capitel gezeigt werden.

341.

Es sey demnach $a+b$ die Wurzel, oder die erste Potestät, so werden die höhern Potestäten durch die Multiplication folgender Gestalt gefunden.

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$\begin{array}{r} a+b \\ \hline aa+ab \\ +ab+ab \\ \hline \end{array}$$

$$(a+b)^2 = aa+2ab+bb$$

$$\begin{array}{r} a+b \\ \hline a^3+2aab+abb \\ +aab+2abb+b^3 \\ \hline \end{array}$$

$$(a+b)^3 = a^3+3aab+3abb+b^3$$

$$\begin{array}{r} a+b \\ \hline a^4+3a^3b+3aabb+ab^3 \\ +a^3b+3aabb+3ab^3+b^4 \\ \hline \end{array}$$

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4$$

$$\begin{array}{r} a+b \\ \hline a^5+4a^4b+6a^3bb+4aab^3+ab^4 \\ +a^4b+4a^3bb+6aab^3+4ab^4+b^5 \\ \hline \end{array}$$

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3bb+10aab^3+5ab^4+b^5$$

$$\begin{array}{r} a+b \\ \hline a^6+5a^5b+10a^4bb+10a^3b^3+5aab^4+ab^5 \\ +a^5b+5a^4bb+10a^3b^3+10aab^4+5ab^5+b^6 \\ \hline \end{array}$$

$$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4bb+20a^3b^3+15aab^4+6ab^5+b^6$$

etc.

342.

Eben so werden auch die Potestäten von der Wurzel a — b gefunden, welche von den vorigen nur darin unterschieden sind, daß das 2te 4te 6te etc. Glied das Zeichen minus bekommt wie aus folgendem zu ersehen.

$(a-b)^1 = a-b$

$$\begin{array}{r} a-b \\ \hline aa-ab \\ \quad -ab+bb \\ \hline \end{array}$$

$(a-b)^2 = aa-2ab+bb$

$$\begin{array}{r} a-b \\ \hline a^3-2aab+abb \\ \quad -aab+2abb-b^3 \\ \hline \end{array}$$

$(a-b)^3 = a^3-3aab+3abb-b^3$

$$\begin{array}{r} a-b \\ \hline a^4-3a^3b+3aabb-ab^3 \\ \quad -a^3b+3aabb-3ab^3+b^4 \\ \hline \end{array}$$

$(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6aabb-4ab^3+b^4$

$$\begin{array}{r} a-b \\ \hline a^5-4a^4b+6a^3bb-4aab^3+ab^4 \\ \quad -a^4b+4a^3bb-6aab^3+4ab^4-b^5 \\ \hline \end{array}$$

$(a-b)^5 = a^5-5a^4b+10a^3bb-10aab^3+5ab^4-b^5$

$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3bb - 10aab^3 + 5ab^4 - b^5$

$a - b$

$a^6 - 5a^5b + 10a^3bb - 10a^3b^3 + 5aab^4 - ab^5$

$- a^5b + 5a^4bb - 10a^3b^3 + 10aab^4 - 3ab^5 + b^6$

$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4bb - 20a^3b^3 + 15aab^4 - 6ab^5 + b^6$

etc.

Hier bekommen nemlich alle ungerade Potestäten von b das Zeichen — die geraden aber behalten das Zeichen +, wovon der Grund offenbahr ist: dann da in der Wurzel — b steht so gehen die Potestäten davon folgender Gestallt fort: $-b, +bb, -b^3, +b^4, -b^5, +b^6$, etc. wo die geraden Potestäten alle das Zeichen + die ungeraden aber alle das Zeichen — haben.

343.

Hier kommt aber diese wichtige Frage vor, wie ohne diese Rechnung würcklich fortzusetzen, alle Potestäten so wohl von a + b als von a — b gefunden werden können? wobey vor allen Dingen zu mercken, daß wann man die Potestäten von a + b anzugeben im Stande ist, daraus von selbsten die Potestäten von a — b entstehen, dann man darf nur die Zeichen der geraden Glieder nemlich des 2ten 4ten 6ten 8ten etc. verändern. Es kommt demnach hier darauf an, eine Regul festzusetzen

nach

nach welcher eine jegliche Potestät von a + b, so hoch dieselbe auch seyn mag, gefunden werden könne, ohne daß man nöthig habe die Rechnung durch alle vorhergehenden anzustellen.

344.

Wann man bey den oben gefundenen Potestäten die Zahlen so einem jedem Gliede vorgesetzt sind weglässt, welche Zahlen die Coefficienten genennt werden, so bemerckt man in den Gliedern eine sehr schöne Ordnung, indem erstlich eben die Potestät von a vorkommt welche verlangt wird; in den folgenden Gliedern aber werden die Potestäten von a immer um eins niedriger, die Potestäten von b hingegen steigen immer um eins, so daß die Summa der Exponenten von a und b in allen Gliedern gleich viel beträgt. Wann man also die zehnte Potestät von a + b verlangt, so werden die Glieder ohne Coefficienten also fort gehen:

$a^{10}, a^9b, a^8bb, a^7b^3, a^6b^4, a^5b^5, a^4b^6, a^3b^7, a^2b^8, a^1b^9, b^{10}$

345

Es muß also nur noch gezeigt werden, wie man die darzu gehörigen Coefficienten finde, oder mit was für Zahlen ein jegliches Glied multiplicirt werden soll.

Was

Was zwar das erste Glied anbetrift, so ist sein Coefficient immer 1 und bey dem zweyten Glied ist der Coefficient allemahl der Exponent der Potestät selber. Allein für die folgenden läßt sich nicht so leicht eine Ordnung bemercken, inzwischen wann diese Coefficienten nach und nach weiter fortgesetzt werden, so kann man leicht so weit gehen als man will, wie aus folgender Tabelle zu sehen.

Potest: I. = = Coeffi:cienten 1, 1.
II. = = = = = 1, 2, 1.
III. = = = = = 1, 3, 3, 1.
IV. = = = = = 1, 4, 6, 4, 1.
V. = = = = 1, 5, 10, 10, 5, 1.
VI. = = = 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.
VII. = = = 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.
VIII. = = 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.
IX. = 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.
X. 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.

etc.

Also wird von $a + b$ die zehnte Potestät seyn:

$$a^{10} + 10a^9b + 45a^8bb + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}.$$

346.

Bey diesen Coefficienten ist zu mercken daß die Summe derselben für jede Potestät die gleiche Potestät von 2 geben müße. Dann man setze $a = 1$, und $b = 1$, so wird ein jedes Glied außer dem Coefficienten $= 1$, so daß nur die Coefficienten zusammen genommen werden müßen. Dahero dann die zehnte Potestät seyn wird $(1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$.

Eben so verhält es sich auch mit allen übrigen. Also ist für die

Iste $1+1 = 2 = 2^1$

IIte $1+2+1 = 4 = 2^2$

IIIte $1+3+3+1 = 8 = 2^3$

IVte $1+4+6+4+1 = 16 = 2^4$.

Vte $1+5+10+10+5+1 = 32 = 2^5$

VIte $1+6+15+20+15+6+1 = 64 = 2^6$

VIIte $1+7+21+35+35+21+7+1 = 128 = 2^7$

etc.

347.

Bey diesen Coefficienten ist noch zu mercken daß dieselben von Anfang bis in die Mitte steigen, hernach aber nach eben der Ordnung wieder abnehmen:

Bey

Bey den geraden steht der größte in der Mitte, bey den ungeraden aber sind zwey mittlere, welche die größten und einander gleich sind.

Die Ordnung selbst aber verdient noch genauer in Erwegung gezogen zu werden, damit man dieselben für eine jegliche Potestät finden könne, ohne die vorhergehenden erst zu suchen, wozu hier die Regul gegeben werden soll; der Beweiß aber davon wird in das folgende Capitel ersparet werden.

348.

Um nun die Coefficienten für eine gegebene Potestät als z. E. die siebente zu finden, so schreibe man folgende Brüche der Ordnung nach hinter einander:

$$\frac{7}{1}\,|\,\frac{6}{2}\,|\,\frac{5}{3}\,|\,\frac{4}{4}\,|\,\frac{3}{5}\,|\,\frac{2}{6}\,|\,\frac{1}{7}.$$

wo nemlich die Zehler von dem Exponenten der verlangten Potestät anfangen und immer um eines vermindert werden, die Nenner aber nach der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4, etc. fortschreiten. Da nun der erste Coefficient immer eins ist, so giebt der erste Bruch den zweyten Coefficienten; die zwey ersten Brüche mit einander multiplicirt den dritten, die drey ersten mit einander multiplicirt den vierten, und so fort.

Also ist der erste Coefficient = 1, der 2te = $\frac{7}{1}$ = 7, der 3te = $\frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2}$ = 21, der 4te = $\frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3}$ = 35, der 5te = $\frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{4}$ = 35, der 6te = $\frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{5}$ = 21, der 7te = 21. $\frac{1}{6}$ = 7, der 8te = 7. $\frac{1}{7}$ = 1.

349.

Also für die zweyte Potestät hat man diese Brüche $\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2}$ daher der erste Coefficient = 1, der 2te $\frac{2}{1}$ = 2, der 3te: 2. $\frac{1}{2}$ = 1.

Vor die dritte Potestät hat man diese Brüche $\frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3};$ dahero der erste Coefficient = 1 der 2te $\frac{3}{1}$ = 3, der 3te 3. $\frac{2}{2}$ = 3, der 4te $\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3}$ = 1.

Vor die vierte Potestät hat man diese Brüche $\frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4};$ dahero der erste Coefficient = 1 der 2te $\frac{4}{1}$ = 4, der 3te $\frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2}$ = 6, der 4te $\frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}$ = 4, der 5te $\frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$ = 1.

350.

Diese Regul schaft uns also diesen Vortheil, daß man nicht nöthig hat die vorhergehenden Coefficienten zu wißen, sondern sogleich für eine jegliche Potestät die dahin gehörigen Coefficienten finden kann.

Also für die zehnte Potestät schreibt man diese Brüche $\frac{10}{1}$ / $\frac{9}{2}$ / $\frac{8}{3}$ / $\frac{7}{4}$ / $\frac{6}{5}$ / $\frac{5}{6}$ / $\frac{4}{7}$ / $\frac{3}{8}$ / $\frac{2}{9}$ / $\frac{1}{10}$. Dahero bekommt man den ersten Coefficient = 1 den zweyten Coefficient = $\frac{10}{1}$ = 10.

den 3ten $= 10 \cdot \frac{9}{2} = 45$, den 4ten $= 45 \cdot \frac{8}{3} = 120$,
den 5ten $= 120 \cdot \frac{6}{4} = 210$, den 6ten $= 210 \cdot \frac{6}{5} = 252$,
den 7ten $= 252 \cdot \frac{5}{6} = 210$, den 8ten $= 210 \cdot \frac{4}{7} = 120$,
den 9ten $= 120 \cdot \frac{3}{8} = 45$, den 10ten $= 45 \cdot \frac{2}{9} = 10$,
den 11ten $= 10 \cdot \frac{1}{10} = 1$.

351.

Man kann auch diese Brüche so schlecht weg hinschreiben ohne den Werth derselben zu berechnen, und solcher Gestalt wird es leicht seyn, eine jegliche Potestät von $a+b$, so hoch dieselbe auch seyn mag hinzuschreiben.

Also wird die 100te Potestät seyn $(a+b)^{100}$

$= a^{100} + \frac{100}{1} a^{99} b + \frac{100.99}{1\ 2} a^{98} bb + \frac{100.99.98}{1\ 2\ 3} a^{97} b^3$

$+ \frac{100.99.98.97}{1\ 2\ 3\ 4} a^{96} b^4$ etc. woraus die Ordnung der folgenden Glieder offenbahr zu ersehen.

Capitel

Capitel II.

Von der Versetzung der Buchstaben, als worauf der Beweis der vorigen Regul beruhet.

352.

Wann man auf den Ursprung der obigen Coefficienten zurück gehet, so wird man finden, daß ein jegliches Glied so viel mal vorkommt, als sich die Buchstaben, daraus dasselbe besteht, versetzen laßen: als bey der zweyten Potestät kommt das Glied ab zweymal vor, weil man schreibeu kann ab und ba: hingegen kommt daselbst aa nur einmal vor, weil die Ordnung der Buchstaben keine Veränderung leidet. Bey der dritten Potestät kann das Glied aab auf dreyerley Weise geschrieben werden als aab, aba, baa, und deswegen ist der Coefficient auch 3. Eben so bey der vierten Potestät kann das Glied a^3b, oder aaab, auf viererley Weise versetzt werden, als aaab, aaba, abaa, baaa, deswegen ist auch sein Coefficient 4, und das Glied aabb, hat 6 zum Coefficienten, weil sechs Versetzungen statt finden, aabb, abba, baba, abab, bbaa, baab. Und so verhält es sich auch mit allen übrigen.

353.

In der That wann man erweget, daß z. E. die vierte Potestät von einer jeglichen Wurzel, wann dieselbe auch aus mehr als zwey Gliedern besteht, als $(a+b+c+d)^4$ gefunden wird, wann diese vier Factores mit einander multiplicirt werden I. $a+b+c+d$, II. $a+b+c+d$, III. $a+b+c+d$, und IV. $a+b+c+d$, so muß ein jeder Buchstabe des ersten mit einem jeglichen des andern, und ferner mit einem jeglichen des dritten, und endlich noch mit einem jeglichen des vierten multiplicirt werden, dahero ein jegliches Glied aus 4 Buchstaben bestehen und so viel mal vorkommen wird, als sich desselben Buchstaben unter einander versetzen laßen, woraus so dann sein Coefficient bestimmt wird.

354.

Hier kommt es also darauf an zu wissen, wie viel mal eine gewiße Anzahl Buchstaben unter sich versetzt werden kann, wobey insonderheit darauf zu sehen, ob dieselben Buchstaben unter sich gleich oder ungleich sind. Dann wann alle gleich sind, so findet keine Veränderung statt, weswegen auch die einfache Potestäten als a^2, a^3, a^4 etc. alle 1 zum Coefficienten haben.

355.

355.

Wir wollen erstlich alle Buchstaben ungleich annehmen, und bey zweyen, nemlich ab anfangen, wo öffenbahr zwey Versetzungen statt finden, als ab, ba,

Hat man drey Buchstaben abc, so ist zu mercken, daß ein jeder die erste Stelle haben könne, da dann die zwey übrigen zwey mal versetzt werden können. Wann also a zuerst steht, so hat man zwey Versetzungen abc, acb: steht b zu erst so hat man wieder zwey, bac, bca: und eben so viel wann c zuerst steht, cab, cba. Dahero in allem die Zahl der Versetzungen seyn wird 3. 2 = 6.

Hat man vier Buchstaben abcd, so kann ein jeder die erste Stelle einnehmen, und in jedem Fall geben die drey übrigen sechs Versetzungen. Daher in allem die Anzahl der Versetzungen seyn wird 4. 6 = 24 = 4. 3. 2. 1.

Hat man fünf Buchstaben abcde, so kann ein jeder die erste Stelle haben und für jede lassen sich die vier übrigen 24 mal versetzen. Dahero die Anzahl aller Versetzungen seyn wird 5. 24 = 120 = 5. 4. 3. 2. 1.

356.

So groß demnach auch immer die Anzahl der Buchstaben seyn mag, wann dieselben nur alle un-

gleich unter sich sind, so läßt sich die Anzahl aller Versetzungen gantz leicht bestimmen, wie aus folgender Tabelle zu sehen.

Anzahl der Buchst: I.	Anzahl der Versetz: 1 = 1
II.	2. 1 = 2
III.	3. 2. 1 = 6
IV.	4. 3. 2. 1 = 24
V.	5. 4. 3. 2. 1 = 120
VI.	6. 5. 4. 3. 2. 1 = 720
VII.	7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 5040
VIII.	8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 40320
IX.	9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 362880
X.	10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 3628800

357.

Es ist aber wohl zu mercken, daß diese Zahlen nur alsdann statt finden, wann alle Buchstaben unter sich ungleich sind, dann wann zwey oder mehr einander gleich sind, so wird die Anzahl der Versetzungen weit geringer: und wann gar alle einander gleich sind, so hat man nur eine einzige. Wir wollen also sehen wie nach der Anzahl der gleichen Buchstaben die obigen Zahlen vermindert werden müßen.

358.

Sind zwey Buchstaben einander gleich so werden die zwey Versetzungen nur auf eine gerechnet. Dahero die obige Zahl auf die Hälfte gebracht oder durch 2 dividirt werden muß. Sind drey Buchstaben einander gleich so werden 6 Versetzungen nur für eine gerechnet: dahero die obigen Zahlen durch $6 = 3.2.1$ getheilt werden müssen. Eben so wann vier Buchstaben einander gleich sind, so müßen die obigen Zahlen durch 24 das ist durch $4.3.2.1$ getheilt werden u. s. f.

Hieraus kann man nun bestimmen, wie viel mal diese Buchstaben aaabbc versetzt werden können. Die Anzahl derselben ist sechs, welche wann sie ungleich wären $6.5.4.3.2.1$ Versetzungen zulaßen würden. Weil aber hier a drey mal vorkommt, so muß diese Zahl durch $3.2.1$, und weil b zwey mal vorkommt noch ferner durch 2.1 getheilt werden, dahero die Anzahl der Versetzungen seyn wird $= \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} = 5.4.3 = 60$.

359.

Hieraus können wir nun die Coefficienten eines jeden Glieds für eine jede Potestät bestimmen, welches wir z. E. für die siebente Potestät $(a+b)^7$ zeigen

wollen. Das erste Glied ist a^7 welches nur einmahl vorkommt, und da in allen übrigen sieben Buchstaben vorkommen, so wäre die Anzahl aller Versetzungen 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 wann sie alle ungleich wären. Da aber im zweyten Stied a^6b, sechs gleiche Buchstaben vorhanden sind, so muß jene Zahl durch 6. 5. 4. 3. 2. 1 getheilt werden, woraus der Coefficient seyn wird $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{6.5.4.3.2.1} = \frac{7}{1}$.

In dritten Glied a^5bb kommt a fünfmal und b zweymal vor, dahero die obige Zahl erstlich durch 5.4.3.2.1. und noch durch 2. 1 getheilt werden muß, woraus der Coefficient seyn wird $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{5.4.3.2.1.1.2} = \frac{7.6.}{1.2.}$

Im vierten Glied a^4b^3 steht a vier mal und b drey mal; dahero die obige Zahl erstlich durch 4. 3. 2. 1 und hernach noch durch 3. 2. 1 oder 1. 2. 3 getheilt werden muß; da dann der Coefficient wird $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.1.2.3} = \frac{7.6.5}{1.2.3}$

Eben so wird für das fünften Glied a^3b^4 der Coefficient $= \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}$ und so weiter, wodurch die oben gegebene Regul erwiesen wird.

360.

Diese Betrachtung führt uns aber noch weiter und lehret wie man auch von solchen Wurzeln die

aus

aus mehr als zwey Theilen bestehen, alle Potestäten finden soll. Wir wollen dieses nur mit der dritten Potestät von $a + b + c$ erläutern, worinnen alle mögliche Zusammensetzungen von dreyen Buchstaben als Glieder vorkommen müßen, und ein jedes die Anzahl aller seiner Versetzungen zum Coefficient haben wird: also wird diese dritte Potestät oder $(a+b+c)^3$ seyn.

$$a^3+3aab+3aac+3abb+6abc+3acc+b^3+3bbc+3bcc+c^3.$$

Laßt uns setzen es sey $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ so wird der Cubus von $1+1+1$ das ist von 3, seyn

$$1+3+3+3+6+3+1+3+3+1 = 27.$$

Setzt man $a = 1$, $b = 1$ und $c = -1$, so wird der Cubus von $1+1-1$ das ist von 1 seyn

$$1+3-3+3-6+3+1-3+3-1 = 1.$$

Capitel 12.

Von der Entwickelung der Irrational-Potestäten durch unendliche Reihen.

361.

Da wir gezeigt haben, wie von der Wurzel $a+b$ eine jegliche Potestät gefunden werden soll, der Exponent mag so groß seyn als er nur immer will, so sind wir im Stande auf eine allgemeine Art die Potestät von $a+b$ auszudrucken, wann der Exponent auch unbestimmt, und durch einen Buchstaben n ausgedrückt ist.

Also werden wir nach der obigen gegebenen Regul finden

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 \text{ etc.}$$

362.

Wollte man die gleiche Potestät von der Wurzel $a-b$ nehmen, so darf man nur die Zeichen des 2ten, 4ten, 6ten, etc. Gliedes verändern, woher man haben wird

$(a-b)^n$

$$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3$$
$$+ \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 \text{ etc.}$$

363.

Diese Formeln dienen uns um alle Arten von Wurzeln auszudrücken. Dann da wir gezeigt haben wie die Wurzeln auf gebrochene Exponenten gebracht werden können, und daß $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ und $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$ u. s. f. so wird auch seyn.

$\sqrt[2]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$ und $\sqrt[4]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{4}}$ u. s. f.

dahero um die Quadratwurzel von $a+b$ zu finden haben wir nur nöthig in der obigen allgemeinen Formel für den Exponenten n den Bruch $\frac{1}{2}$ zu setzen, daher wir erstlich für die Coefficienten bekommen werden

$$\frac{n}{1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4}, \quad \frac{n-2}{3} = \frac{3}{6}, \quad \frac{n-3}{4} = -\frac{5}{8}, \quad \frac{n-4}{5} = -\frac{7}{10}$$

$\frac{n-5}{6} = -\frac{9}{12}$. Hernach ist $a^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ und $a^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{a}}$,

$a^{n-2} = \frac{1}{a\sqrt{a}}$, $a^{n-3} = \frac{1}{aa\sqrt{a}}$ etc.

Oder man kann diese Potestäten von a auch also ausdrücken $a^n = \sqrt{a}$, $a^{n-1} = \frac{\sqrt{a}}{a}$, $a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}$,

$a^{n-3} = \frac{a^n}{a^3} = \frac{\sqrt{a}}{a^3}$, $a^{n-} = \frac{a^n}{a^4} = \frac{\sqrt{a}}{a^4}$ etc.

364.

Dieses voraus gesetzt wird die Quadrat-Wurzel aus $a+b$ folgender gestalt ausgedrückt werden,

$\sqrt{(a+b)} =$

$$\sqrt{a} + \tfrac{1}{2}b\tfrac{\sqrt{a}}{a} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}bb\tfrac{\sqrt{a}}{aa} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}b^3\tfrac{\sqrt{a}}{a^3} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{5}{8}b^4\tfrac{\sqrt{a}}{a^4} \text{ etc.}$$

365.

Wann nun a eine Quadrat-Zahl ist, so kann $\sqrt{a}$ angegeben, und also die Quadrat-Wurzel aus $a+b$, ohne Wurzel-Zeichen durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden.

Also wann $a = cc$ so ist $\sqrt{a} = c$, und man wird haben

$$\sqrt{(cc+b)} = c + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{b}{c} - \tfrac{1}{8}\cdot\frac{bb}{c^3} + \tfrac{1}{16}\cdot\frac{b^3}{c^5} - \tfrac{5}{128}\cdot\frac{b^4}{c^7} \text{ etc.}$$

Hierdurch kann man aus einer jeglichen Zahl die Quadrat-Wurzel ausziehen, weil sich eine jede Zahl in zwey Theile zertheilen läßt, davon einer ein Quadrat ist

ist welcher durch cc angedeutet wird. Will man z. E. die Quadrat-Wurzel von 6 haben, so setzt man $6 = 4 + 2$, und da wird $cc = 4$, $c = 2$ und $b = 2$, daher bekommt man $\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{5}{1024}$ etc. Nimmt man hiervon nur die zwey ersten Glieder, so bekommt man $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, wovon das Quadrat $\frac{25}{4}$ nur um $\frac{1}{4}$ größer ist als 6. Nimmt man drey Glieder so hat man $2\frac{7}{16} = \frac{39}{16}$, wovon das Quadrat $\frac{1521}{256}$ nur um $\frac{15}{256}$ zu klein ist.

366.

Bey eben diesem Exempel, weil $\frac{5}{2}$ der Wahrheit schon sehr nahe kommt, so kann man setzen $6 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4}$.

Also wird $cc = \frac{25}{4}$, $c = \frac{5}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$. Woraus wir nur die zwey ersten Glieder berechnen wollen, da dann kommt, $\sqrt{6} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{20} = \frac{49}{20}$, wovon das Quadrat $\frac{2401}{400}$ nur um $\frac{1}{400}$ größer ist als 6.

Setzen wir nun $6 = \frac{2401}{400} - \frac{1}{400}$ so wird $c = \frac{49}{20}$ und $b = -\frac{1}{400}$. Woraus wiederum nur die zwey ersten Glieder genommen geben $\sqrt{6} = \frac{49}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}} =$

$\frac{49}{20}$

$\frac{49}{20} - \frac{1}{\frac{1}{2}\,\frac{400}{49}} = \frac{49}{20} - \frac{1}{1960} = \frac{4801}{1960}$ wovon das Quadrat $= \frac{23040601}{3841600}$. Nun aber ist $6 = \frac{23040600}{3841600}$, also ist der Fehler nur $\frac{1}{3841600}$.

367.

Eben so kann man auch die Cubic-Wurzel aus $a+b$ durch eine unendliche Reihe ausdrücken. Dann da $\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$ so wird in unserer allgemeinen Formel $n = \frac{1}{3}$, und daher für die Coefficienten $\frac{n}{1} = \frac{1}{3}$,

$\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{3}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{5}{9}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{2}{3}$, $\frac{n-4}{5} = -\frac{11}{15}$ etc.

Für die Potestäten von a aber ist $a^n = \sqrt[3]{a}$, $a^{n-1} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}$,

$a^{n-2} = \frac{\sqrt[3]{a}}{aa}$, $a^{n-3} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a^3}$ etc. dahero erhalten wir

$$\sqrt[3]{(a+b)} = \sqrt[3]{a} + \tfrac{1}{3}\cdot b\frac{\sqrt[3]{a}}{a} - \tfrac{1}{9}\cdot bb\frac{\sqrt[3]{a}}{aa} + \tfrac{5}{81}\cdot b^3\frac{\sqrt[3]{a}}{a^3} - \tfrac{10}{243}\cdot b^4\frac{\sqrt[3]{a}}{a^4} \text{ etc.}$$

368.

Wann also a ein Cubus nemlich $a = c^3$ so wird $\sqrt[3]{a} = c$, und also fallen die Wurzel-Zeichen weg. Dahero man haben wird

$$\sqrt[3]{(c^3+b)} = c + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{b^1}{cc} - \tfrac{1}{9}\cdot\frac{bb}{c^3} + \tfrac{5}{81}\cdot\frac{b^3}{c^8} - \tfrac{10}{243}\cdot\frac{b^4}{c^{11}} \text{ etc.}$$

369.

369.

Durch Hülfe dieser Formel kann man nun die Cubic-Wurzel von einer ieglichen Zahl durch die Näherung finden, weil sich eine jede Zahl in zwey Theile zertheilen läßt, wie $c^3 + b$, davon der erste ein Cubus ist.

Also wann man die Cubic-Wurzel von 2 verlangt, so setze man $2 = 1 + 1$, da wird $c = 1$ und $b = 1$, folglich $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81}$ etc. wovon die zwey ersten Glieder geben $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ dessen Cubus $\frac{64}{27}$ um $\frac{10}{27}$ zu groß ist. Man setze demnach $2 = \frac{64}{27} - \frac{10}{27}$, so wird $c = \frac{4}{3}$ und $b = -\frac{10}{27}$ und dahero.

$$\sqrt[3]{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-\frac{10}{27}}{\frac{16}{9}}.$$

Diese zwey Glieder geben $\frac{4}{5} - \frac{5}{72} = \frac{91}{72}$, wovon der Cubus ist $\frac{753571}{373248}$. Nun aber ist $2 = \frac{746496}{373248}$ also ist der Fehler $\frac{7075}{373248}$. Und solcher Gestalt kann man, wann man will, immer näher kommen, insonderheit wann man mehr Glieder nehmen will.

Capitel 13.

Von der Entwickelung der negativen Potestäten.

370.

Es ist oben gezeigt worden, daß $\frac{1}{a}$ durch a^{-1} könne ausgedrückt werden, dahero wird auch $\frac{1}{a+b}$ durch $(a+b)^{-1}$ ausgedrückt, also daß der Bruch $\frac{1}{a+b}$ als eine Potestät von $a+b$, deren Exponent $=-1$ ist, kann angesehen werden: woher sich die oben gefundene Reihe für $(a+b)^n$ auch auf diesen Fall erstrecket.

371.

Da nun $\frac{1}{a+b}$ so viel ist als $(a+b)^{-1}$, so setze man in der oben gefundenen Formel $n=-1$, so wird man erstlich für die Coefficienten haben; $\frac{n}{1}=-1$, $\frac{n-1}{2}=-1$, $\frac{n-2}{3}=-1$, $\frac{n-3}{4}=-1$, $\frac{n-4}{5}=-1$ etc. hernach für die Potestäten von a:

$a^n=a^{-1}=\frac{1}{a}$, $a^{n-1}=\frac{1}{a^2}$, $a^{n-2}=\frac{1}{a^3}$, $a^{n-3}=\frac{1}{a^4}$ etc.

Dahero erhalten wir $(a+b)^{-1}=\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}$

$-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b}{a^5}$ etc. welche eben diejenige Reihe ist, die schon oben durch die Division gefunden worden.

372.

Da ferner $\frac{1}{(a+b)}$ so viel ist als $(a+b)^{-2}$ so kann auch diese Formel in eine unendliche Reihe aufgelößt werden.

Man setze nemlich $n=-2$ so hat man erstlich für die Coefficienten, $\frac{n}{1}=-\frac{2}{1}$, $\frac{n-1}{2}=-\frac{3}{2}$, $\frac{n-2}{3}=-\frac{4}{3}$, $\frac{n-3}{4}=-\frac{5}{4}$ etc. und für die Potestäten von a hat man $a^n=\frac{1}{a^2}$, $a^{n-1}=\frac{1}{a^3}$, $a^{n-2}=\frac{1}{a^4}$, $a^{n-3}=\frac{1}{a^5}$ etc. daher erhalten wir $(a+b)^{-2}=\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{2}{1}\cdot\frac{b}{a^3}+\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\frac{b^2}{a^4}$, $-\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\frac{b^3}{a^5}+\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{b^4}{a^6}$ etc. Nun aber ist $\frac{2}{1}=2$, $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}=3$, $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=4$, $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}=5$ etc. Also werden wir haben:

$$\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{a^2}-2\frac{b}{a^3}+3\frac{b^2}{a^4}-4\frac{b^3}{a^5}+5\frac{b^4}{a^6}-6\frac{b^5}{a^7}+7\frac{b^6}{a^8}\text{ etc.}$$

373.

Setzen wir weiter $n=-3$ so bekommen wir eine Reihe für $(a+b)^{-3}$ das ist für $\frac{1}{(a+b)^3}$. Für die Coefficienten wird also seyn, $\frac{n}{1}=-\frac{3}{1}$, $\frac{n-1}{2}=-\frac{4}{2}$, $\frac{n-2}{3}=-\frac{5}{3}$, $\frac{n-3}{4}=-\frac{6}{4}$ etc. für die Potestät von, a aber $a^n=\frac{1}{a^3}$, a^{n-1}

$a^{n-1} = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^5}$ etc. Woraus wir erhalten

$$\frac{1}{(a+b)^3} = \frac{1}{a^3} - \frac{3}{1}\frac{b}{a^4} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\frac{b^2}{a^5} - \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\frac{b^3}{a^6} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\frac{b^4}{a^7} \text{ etc.}$$

$$= \frac{1}{a^3} - 3\frac{b}{a^4} + 6\frac{b^2}{a^5} - 10\frac{b^3}{a^6} + 15\frac{b^4}{a^7} - 21\frac{b^5}{a^8} + 28\frac{b^6}{a^9} - 36\frac{b^7}{a^{10}} + 45\frac{b^8}{a^{11}} \text{ etc.}$$

Last uns ferner setzen $n = -4$ so haben wir für die Coefficienten, $\frac{n}{1} = -\frac{4}{1}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{5}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{6}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{7}{4}$ etc. für die Potestäten von a aber $a^n = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^5}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^6}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^7}$, $a^{n-4} = \frac{1}{a^8}$ etc. Woraus gefunden wird:

$$\frac{1}{(a+b)^4} = \frac{1}{a^4} - \frac{4}{1}\frac{b}{a^5} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\frac{b^2}{a^6} - \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\frac{b^3}{a^7} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\frac{b^4}{a^8} \text{ etc.}$$

$$= \frac{1}{a^4} - 4\frac{b}{a^5} + 10\frac{b^2}{a^6} - 20\frac{b^3}{a^7} + 35\frac{b^4}{a^8} - 56\frac{b^5}{a^9} \text{ etc.}$$

374.

Hieraus können wir nun sicher schließen, daß man für eine jegliche dergleichen negative Potestät auf eine allgemeine Art haben werde:

$$\frac{1}{(a+b)^m} = \frac{1}{a^m} - \frac{m}{1}\cdot\frac{b}{a^{m+1}} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\frac{b^2}{a^{m+2}}$$

$$- \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\frac{b^3}{a^{m+3}} \text{ etc.}$$

Aus welcher Formel nun alle dergleichen Brüche in unendliche Reihen verwandelt werden, wo man auch

auch so gar für m Brüche annehmen kann um irrationale Formeln auszudrücken.

375.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch folgendes anführen: Da wir gefunden haben, daß

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ etc.}$$

So wollen wir diese Reihe mit a+b multipliciren, weil alsdann die Zahl herauskommen muß 1. Die Multiplication wird aber also zu stehen kommen:

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ etc.}$$

$$a + b$$

$$1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{aa} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5} \text{ etc.}$$

$$+ \frac{b}{a} - \frac{b^2}{aa} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5} \text{ etc.}$$

Product 1 wie nothwendig folgen muß.

376.

Da wir ferner gefunden haben $\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7}$ etc. wann man diese Reihe mit $(a+b)^2$ multiplicirt, so muß ebenfals 1 herauskommen. Es ist aber $(a+b)^2 = aa + 2ab + bb$ und die Multiplication wird also zu stehen kommen

$$\frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7} \text{ etc.}$$

$$aa + 2ab + bb$$

$$1 - \frac{2b}{a} + \frac{3bb}{a^2} - \frac{4b^3}{a^3} + \frac{5b^4}{a^4} - \frac{6b^5}{a^4} \text{ etc.}$$

$$+ \frac{2b}{a} - \frac{4bb}{a^2} + \frac{6b^3}{a^3} - \frac{8b^4}{a^4} + \frac{10b^5}{a^5} \text{ etc.}$$

$$+ \frac{bb}{a^2} - \frac{2b^3}{a^3} + \frac{3b^4}{a^4} - \frac{4b^5}{a^5} \text{ etc.}$$

Product 1 wie die Natur der Sache erfordert.

377.

Solte man aber diese für $\frac{1}{(a+b)^2}$ gefundene Reihe nur mit $a+b$ multipliciren, so müste $\frac{1}{a+b}$ herauskommen, oder die für diesen Bruch oben gefundene Reihe $\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6}$ etc. welches auch die folgende Multiplication bestätigen wird.

$$\frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} \text{ etc.}$$

$$a + b$$

$$\frac{1}{a} - \frac{2b}{a^2} + \frac{3bb}{a^3} - \frac{4b^3}{a^4} + \frac{5b^4}{a^5} \text{ etc.}$$

$$+ \frac{b}{a^2} - \frac{2bb}{a^3} + \frac{3b^3}{a^4} - \frac{4b^4}{a^5} \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} \text{ etc.}$$

Ende des Zweyten Abschnitts.

Des

Des

Ersten Theils

Dritter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

Capitel I.

Von der Arithmetischen Verhältniß, oder dem Unterscheid zwischen zweyen Zahlen.

378.

Entweder sind zwey Größen einander gleich, oder einander ungleich. Im letztern Fall ist eine größer als die andere, und wann man nach ihrer Ungleichheit fragt, so kann dis auf zweyerley weise geschehen; dann entweder fragt man um wie viel die eine größer sey als die andere? oder man fragt wie viel mal die eine größer sey als die andere? Beyderley Bestimmung wird ein Verhältniß genennt, und die erstere pflegt eine Arithmetische Verhältniß, die letztere aber eine Geometrische genennt zu werden. Wel-

che Benennungen aber mit der Sache selbst keine Gemeinschaft haben, sondern willkührlich eingeführt worden sind.

379.

Es versteht sich hier von selbsten, daß die Größen einerley Art seyn müßen, weil sonsten nichts von ihrer Gleichheit, oder Ungleichheit bestimmt werden kann. Dann es würde ungereimt seyn wann einer z. E. fragen wolte, ob 2 ℔ und 3 Ellen einander gleich oder ungleich wären? Dahero ist hier allenthalben von Größen einerley Art die Rede, und da sich dieselbe immer durch Zahlen anzeigen laßen, so wird wie schon anfänglich gemeldet worden, hier nur von bloßen Zahlen gehandelt.

380.

Wann also von zwey Zahlen gefragt wird um wie viel die eine größer sey als die andere, so wird durch die Antwort ihr Arithmetisches Verhältniß bestimmt. Da nun solches geschiehet, wann man den Unterscheid zwischen den beyden Zahlen anzeigt, so ist ein Arithmetisches Verhältniß nichts anders als der Unterscheid zwischen zweyen Zahlen. Welches letztere Wort (Unterscheid) füglicher gebraucht wird, so daß das Wort

Ver=

Verhältniß nur allein bey den so genanten Geometrischen Verhältnißen beybehalten wird.

381.

Der Unterscheid zwischen zweyen Zahlen wird aber gefunden, wann man die kleinere von der grösern subtrahirt und dadurch erhält man die Antwort auf die Frage um wie viel die eine größer sey als die andere. Wann also die beyden Zahlen einander gleich sind, so ist der Unterscheid nichts oder Null und wann man fragt um viel die eine größer sey als die andere? so muß man antworten, um nichts. Da z. E. 6=2.3 so ist der Unterscheid zwischen 6 und 2. 3 nichts.

382.

Sind aber die beyden Zahlen ungleich als 5 und 3 und man fragt um wie viel 5 größer sey als 3, so ist die Antwort um 2; welche gefunden wird wann man 3 von 5 subtrahiret. Eben so ist 15 um 5 grösser als 10, und 20 ist um 8 größer als 12.

383.

Hier kommen also drey Sachen zu betrachten vor; erstlich die größere Zahl, zweytens die kleinere, und

drittens der Unterscheid, welche unter sich eine solche Verbindung haben, daß man immer aus zwey derselben die dritte finden kann. Es sey die größere = a die kleinere = b und der Unterscheid, welcher auch die Differenz gennent wird, = d: so wird der Unterscheid d gefunden, wann man b von a subtrahirt, also daß d = a — b; woraus erhellet, wie man, wann a und b gegeben sind, d finden soll.

384.

Wann aber die kleinere Zahl b nebst dem Unterscheid d gegeben ist, so wird die größere daraus gefunden, wann man den Unterscheid zu der kleinern Zahl addirt, daher bekommt man die größere a = b + d. Dann wann man von b + d die kleinere b abzieht, so bleibt übrig d, welches der vorgegebene Unterscheid ist. Gesetzt die kleinere Zahl sey 12 und der Unterscheid 8 so wird die größere seyn = 20.

385.

Wann aber die größere Zahl a nebst dem Unterscheid d gegeben ist, so wird die kleinere b gefunden, wann man den Unterscheid von der größeren Zahl subtrahirt. Dahero bekommt man b = a — d. Dann wann

ich

ich diese Zahl a — d von der größeren a subtrahire, so bleibt übrig d, welches der gegebene Unterscheid ist.

386.

Diese drey Zahlen a, b, d sind also dergestalt mit einander verbunden, daß man daraus die drey folgenden Bestimmungen erhält. 1stens hat man $d = a - b$, 2tens $a = b + d$ und 3tens $b = a - d$, und wann von diesen drey Vergleichungen eine wahr ist, so sind auch die beyden andern nothwendig wahr. Wann dahero überhaupt $z = x + y$, so ist auch nothwendig $y = z - x$ und $x = z - y$.

387.

Bey einem solchem Arithmetischen Verhältniß ist zu mercken, daß wann zu den beyden Zahlen a und b eine beliebige Zahl c entweder addirt, oder davon subtrahirt wird, der Unterscheid eben derselbe bleibet. Also waun d der Unterscheid ist zwischen a und b so ist auch d der Unterscheid zwischen den beyden Zahlen $a + c$ und $b + c$, und auch zwischen $a - c$ und $b - c$. Da zum Exempel zwischen diesen Zahlen 20 und 12 der Unterscheid 8 ist, so bleibt auch dieser Unterscheid, wann man zu denselben Zahlen 20 und 12 eine Zahl nach Belieben entweder addirt oder subtrahirt.

388.

Der Beweis hievon ist offenbahr. Dann wann $a-b=d$ so ist auch $(a+c)-(b+c)=d$. Eben so wird auch seyn $(a-c)-(b-c)=d$.

389.

Wann die beyden Zahlen a und b verdoppelt werden, so wird auch der Unterscheid zweymal so groß. Wann also $a-b=d$ so wird seyn $2a-2b=2d$; und allgemein wird man haben $na-nb=nd$, was man auch immer vor eine Zahl für n annimmt.

Capitel 2.

Von den Arithmetischen Proportionen.

390.

Wann zwey Arithmetische Verhältniße einander gleich sind, so wird die Gleichheit derselben eine Arithmetische Proportion genennt.

Also

Also wann a − b = d und auch p − q = d, so daß der Unterscheid zwischen den Zahlen p und q eben so groß ist, als zwischen den Zahlen a und b; so machen diese vier Zahlen eine Arithmetische Proportion aus, welche also geschrieben wird a − b = p − q, als wodurch deutlich angezeigt wird, daß der Unterscheid zwischen a und b eben so groß sey als zwischen p und q.

391.

Eine Arithmetische Proportion besteht demnach aus vier Gliedern, welche so beschaffen seyn müßen, daß wann man das zweyte von dem ersten subtrahirt, eben so viel übrig bleibt, als wann man das vierte von dem dritten subtrahirt. Also machen diese Zahlen 12, 7, 9, 4, eine Arithmetische Proportion aus, weil 12 − 7 = 9 − 4.

392.

Wann man eine Arithmetische Proportion hat, als a − b = p − q, so laßen sich darinn das zweyte und dritte Glied verwechseln und es wird auch seyn a − p = b − q. Dann da a − b = p − q so addire man erstlich beyderseits b und da hat man a = b + p − q. Hernach subtrahire man beyderseits p, so bekommt man a − p = b − q. Da also 12 − 7 = 9 − 4 so ist auch 12 − 9 = 7 − 4.

393.

393.

In einer jeglichen Arithmetischen Proportion kann man auch das erste Glied mit dem zweyten und zugleich das dritte mit dem vierten verwechseln. Dann wann a−b = p−q so ist auch b−a = q−p. Dann b−a ist das Negative von a−b und eben so ist auch q−p das Negative von p−q. Da nun 12−7 = 9−4 so ist auch 7−12 = 4−9.

394.

Insonderheit aber ist bey einer jeglichen Arithmetischen Proportion diese Haupt-Eigenschaft wohl zu bemercken, daß die Summ des zweyten und dritten Glieds immer eben so groß sey, als die Summ des ersten und vierten Glieds. Welches auch also ausgesprochen wird daß die Summ der mittlern Glieder so groß sey als die Summ der äußern. Also da 12−7 = 9−4 so ist 7+9 = 12+4, dann jedes macht 16.

395.

Um diese Haupt-Eigenschaft zu beweisen, so sey a−b = p−q: man addire beyderseits b+q so bekommt man a+q = b+p, das ist die Summ des ersten und vierten ist gleich der Summ des zweyten und dritten.

Hin-

Hinwiederum auch wann vier Zahlen als a, b, p, q, so beschaffen sind, daß die Summ der zweyten und dritten so groß ist als die Summ der ersten und vierten, nemlich daß $b+p=a+q$, so sind dieselben Zahlen gewis in einer Arithmetischen Proportion und es wird seyn $a-b=p-q$. Dann da $a+q=b+p$ so subtrahire man beyderseits $b+q$, und da bekommt man $a-b=p-q$.

Da nun die Zahlen 18, 13, 15, 10, so beschaffen sind, daß die Summ der mittlern $13+15=28$ der Summe der äußern $18+10=28$ gleich sind, so sind dieselben auch gewis in einer Arithmetischen Proportion und folglich $18-13=15-10$.

396.

Aus dieser Eigenschaft kann man leicht folgende Frage auflösen: Wann von einer Arithmetischen Proportion die drey ersten Glieder gegeben sind, wie man daraus das vierte finden soll. Es seyn die drey ersten Glieder a, b, p und für das vierte, so gefunden werden soll, schreibe man q, so wird man haben $a+q=b+p$. Nun subtrahire man beyderseits a so bekommt man $q=b+p-a$. Also wird das vierte Glied gefunden, wann man das zweyte und dritte zusammen addirt

und

und von der Summ das erste subtrahirt. Es seyn z. E. 19, 28, 13 die drey ersten Glieder, so ist die Summa des zweyten und dritten = 41 davon das erste 19 subtrahirt, bleibt 22 für das vierte Glied, und die Arithmetische Proportion wird seyn 19 – 28 = 13 – 22, oder 28 – 19 = 22 – 13, oder 28 – 22 = 19 – 13.

397.

Wann in einer Arithmetischen Proportion das zweyte Glied dem dritten gleich ist, so hat man nur drey Zahlen, welche also beschaffen sind, daß die erste weniger der andern so groß ist als die andre weniger der dritten, oder daß der Unterscheid zwischen der ersten und andern so groß ist, als der Unterscheid zwischen der andern und dritten. Solche 3 Zahlen sind 19, 15, 11, weil 19 – 15 = 15 – 11.

398.

Solche drey Zahlen schreiten in einer Arithmetischen Progression fort, welche entweder steigt, wann die zweyte um so viel die erste übersteigt, als die dritte die andere, wie in diesem Exempel 4, 7, 10, oder fält wann die Zahlen um gleich viel kleiner werden als 9, 5, 1.

399.

Es seyn die Zahlen a, b, c in einer Arithmetischen Progression, so muß seyn a – b = b – c woraus folget, nach

nach der Gleichheit der mittlern und der äußern Summ $2b = a + c$. Nimmt man beyderseits a weg so bekommt man $c = 2b - a$.

400.

Wann also von einer Arithmetischen Progression die zwey ersten Glieder gegeben sind als a, b so wird daraus das dritte gefunden, wann man das zweyte verdoppelt und davon das erste subtrahirt. Es seyn 1 und 3 die zwey ersten Glieder einer Arithmetischen Progression, so wird das dritte seyn $= 2.3 - 1 = 5$, und aus den Zahlen 1, 3, 5 hat man diese Proportion $1 - 3 = 3 - 5$.

401.

Man kann nach dieser Regul weiter fortschreiten und wie man aus dem ersten und zweyten das dritte gefunden hat, so kann man aus dem zweyten und dritten das vierte u. s. f. finden, und solcher gestalt die Arithmetische Progression fortsetzen so weit man will. Es sey a das erste Glied und b das zweyte, so wird das dritte $= 2b - a$; das vierte $= 4b - 2a - b = 3b - 2a$; das fünfte $6b - 4a - 2b + a = 4b - 3a$; das sechste $= 8b - 6a - 3b + 2a = 5b - 4a$; das siebente $= 10b - 8a - 4b + 3a = 6b - 5a$ etc.

Capitel 3.

Von den Arithmetischen Progressionen.

402.

Eine Reihe Zahlen, welche immer um gleich viel wachsen oder abnehmen, aus so viel Gliedern dieselbe auch immer bestehen mag, wird eine Arithmetische Progression genennt.

Also machen die natürlichen Zahlen der Ordnung nach geschrieben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 etc. eine Arithmetische Progression weil dieselben immer um eins steigen und diese Reihe als 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1 etc. ist auch eine Arithmetische Progression, weil diese Zahlen immer um 3 abnehmen.

403.

Die Zahl um welche die Glieder einer Arithmetischen Progression größer oder kleiner werden, wird die Differenz oder der Unterscheid genennt. Wann also das erste Glied nebst der Differenz gegeben ist, so kann man die Arithmetische Progression so weit man will fort=

fortsetzen. Es sey z. E. daß erste Glied = 2 und die Differenz = 3 so wird die steigende Progression seyn :

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29 etc.

wo ein jedes Glied gefunden wird, wann man zu dem vorhergehenden die Differenz addirt.

404.

Man pflegt über die Glieder einer solchen Arithmetischen Progression die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. zu schreiben, damit man so gleich sehen könne das wie vielte Glied ein jegliches sey, und die also darüber geschriebene Zahlen werden die Zeiger genennt, das obige Exempel kommt daher also zu stehen :

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9, 10
Arith. Prog.	2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26, 29 etc.

woraus man sieht das 29 das zehnte Glied sey.

405.

Es sey a das erste Glied und d die Differenz so wird die Arithmetische Progression also zu stehen kommen :

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
a,	a+d,	a+2d,	a+3d,	a+4d,	a+5d,	a+6d,	a+7d etc.

woraus so gleich ein jegliches Glied gefunden werden kann, ohne daß man nöthig habe alle vorhergehende zu wißen und dieses blos allein aus dem ersten Glied a und der Differenz d. Also wird z. E. das 10te Glied seyn = a + 9 d, das 100te = a + 99 d, und auf eine allgemeine Art wird das nte Glied seyn a + (n − 1) d.

406.

Wann die Arithmetische Progression irgendwo abgebrochen wird, so hat man insonderheit das erste Glied und das letzte zu bemercken, und der Zeiger des letzten wird die Anzahl der Glieder anzeigen. Wenn also das erste Glied = a, die Differenz = d und die Anzahl der Glieder = n, so ist das letzte Glied = a + (n − 1) d. Dasselbe wird also gefunden wann man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt, und dazu das erste Glied addirt. Man habe z. E. eine Arithmethische Progression von 100 Gliedern, wovon das erste = 4 und die Differenz = 3 so wird das letzte Glied seyn 99. 3 + 4 = 301.

407.

Hat man das erste Glied = a und das letzte = z nebst der Anzahl der Glieder = n so kann man daraus

die

die Differenz $=d$ finden. Dann da das letzte Glied ist $z=a+(n-1)d$, so subtrahire man beyderseits a so hat man $z-a=(n-1)d$. Wann man also von dem letzten Glied das erste subtrahirt, so hat man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt; oder $z-a$ ist das Product von $(n-1)$ in d. Man darf also nur $z-a$ durch $n-1$ dividiren, so bekommt man die Differenz $d=\frac{z-a}{n-1}$, woraus diese Regul entspringt. Man subtrahirt vom letzten Glied das erste, den Rest theilt man durch die Anzahl der Glieder weniger eins, so bekommt man die Differenz: woraus man hernach die ganze Progression hinsetzen kann.

408.

Es hat z. E. einer eine Arithmetische Progression von 9 Gliedern, wovon das erste Glied 2 und das letzte 26, von welcher die Differenz gesucht werden soll. Man muß also das erste Glied 2 von dem letzten 26 subtrahiren und den Rest 24 durch $9-1$, das ist durch 8 dividiren, so bekommt man die Differenz $=3$, und die Progression selbst wird seyn:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26.

Um ein ander Exempel zu geben; so sey das erste Glied 1, das letzte 2, und die Anzahl der Glieder 10, wovon die Arithmetische Progression verlangt wird. Hier bekommt man also zur Differenz $\frac{2-1}{10-1} = \frac{1}{9}$; woraus die verlangte Progression seyn wird:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
1, $1\frac{1}{9}$, $1\frac{2}{9}$, $1\frac{3}{9}$, $1\frac{4}{9}$, $1\frac{5}{9}$, $1\frac{6}{9}$, $1\frac{7}{9}$, $1\frac{8}{9}$, 2.

Noch ein Exempel. Es sey das erste Glied $2\frac{1}{3}$, das letzte $12\frac{1}{2}$ und die Anzahl der Glieder 7. Hieraus erhält man die Differenz $\frac{12\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}{7-1} = \frac{10\frac{1}{6}}{6} = \frac{61}{36} = 1\frac{25}{36}$; folglich wird die Progression seyn:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
$2\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{36}$, $5\frac{13}{18}$, $7\frac{5}{12}$, $9\frac{1}{9}$, $10\frac{29}{36}$, $12\frac{1}{2}$.

409.

Wann ferner das erste Glied a und das letzte z, sammt der Differenz d gegeben ist, so kann man daraus die Anzahl der Glieder n finden. Dann da $z-a = (n-1)d$, so dividire man beyderseits mit d und da bekommt man $\frac{z-a}{d} = n-1$. Da nun n um eins größer ist als $n-1$, so wird $n = \frac{z-a}{d} + 1$; folglich findet man die Anzahl der Glieder, wann man den Unterscheid

scheid zwischen dem ersten und letzten Glied z — a durch die Differenz dividiret und zum Quotient $\frac{z-a}{a}$ noch eins addirt.

Es sey z. E. das erste Glied = 4, das letzte = 100, und die Differenz = 12, so wird die Anzahl der Glieder seyn $\frac{100-4}{12}+1=9$, und diese neun, Glieder sind folgende.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
4,	16,	28,	40,	52,	64,	76,	88,	100.

Es sey das erste Glied = 2, das letzte = 6, und die Differenz = $1\frac{1}{3}$ so wird die Anzahl der Glieder seyn $\frac{4}{1\frac{1}{3}}+1=4$, und diese vier Glieder sind.

1,	2,	3,	4.
2,	$3\frac{1}{3}$,	$4\frac{2}{3}$,	6.

Es sey ferner das erste Glied = $3\frac{1}{3}$, das letzte = $7\frac{2}{3}$, und die Differenz = $1\frac{4}{9}$, so wird die Anzahl der Glieder = $\frac{7\frac{2}{3}-3\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}}+1=4$, und diese vier Glieder sind

1,	2,	3,	4.
$3\frac{1}{3}$,	$4\frac{7}{9}$,	$6\frac{2}{9}$,	$7\frac{2}{3}$.

410.

Es ist aber hier wohl zu mercken, daß die Anzahl der Glieder nothwendig eine gantze Zahl seyn muß.

Wann man also bey obigem Exempel für n einen Bruch gefunden hätte, so wäre die Frage ungereimt gewesen.

Wann folglich für $\frac{z-a}{d}$ keine gantze Zahl gefunden würde so lies sich diese Frage nicht auflösen, und man müßte antworten, daß die Frage unmöglich wäre. Dahero muß sich bey dergleichen Fragen die Zahl $z-a$ durch d theilen laßen.

411.

Bey einer jeden Arithmetischen Progression kommen also folgende vier Stücke zu betrachten vor:

I. das erste Glied a, II. das letzte Glied z,
II. die Differenz d, IV. die Anzahl der Glieder n,

welche so beschaffen sind, daß wann drey derselben bekant, das vierte daraus bestimmt werden kann, als:

I. Wann a, d u. n bekandt sind, so hat man $z=a+(n-1)d$.
II. Wann z, d u. n bekandt sind, so hat man $a=z-(n-1)d$.
III. Wann a, z u. n bekandt sind, so hat man $d=\frac{z-a}{n-a}$
IV. Wann a, z u. d bekandt sind, so hat man $n=\frac{z-a}{d}+1$.

Capitel

Capitel 4.

Von der Summation der Arithmetischen Progressionen.

412.

Wann eine Arithmetische Progression vorgelegt ist, so pflegt man auch die Summ derselben zu suchen, welche gefunden wird, wann man alle Glieder zusammen addirt. Da nun diese Addition sehr weitläuftig seyn würde wann die Progression aus sehr viel Gliedern besteht, so kann eine Regul gegeben werden, durch deren Hülfe diese Summ gantz leicht gefunden wird.

413.

Wir wollen erstlich eine solche bestimmte Progression betrachten, wo das erste Glied = 2, die Differenz = 3, das letzte Glied = 29, und die Anzahl der Glieder = 10 ist.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29.

Hier ist nun die Summ des ersten und letzten Gliedes = 31, die Summa des zweyten und letzten ohne eins = 31,

di: Summa des dritten und letzten ohne zwey = 31, die Summa des vierten und letzten ohne drey = 31, und so ferner, woraus man sieht das immer zwey Glieder die von dem ersten und letzten gleichweit entfernt sind, zusammen genommen, eben so viel ausmachen, als das erste und letzte zusammen.

414.

Der Grund davon fält auch so gleich in die Augen. Dann wann das erste Glied gesetzt wird = a und das letzte = z, die Differenz aber = d, so ist die Summa des ersten und letzten = a + z. Hernach ist das zweyte Glied a + d und das letzte ohne eins = z − d, welche zusammen genommen machen a + z. Ferner ist das dritte Glied a + 2d und das letzte ohne zwey = z − 2d, welche zusammen betragen a + z. Woraus die Wahrheit des obigen Satzes erhellet.

415.

Um nun die Summa der obigen Progression zu finden, nemlich von 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29, so schreibe man darunter eben diese Progression rückwerts und addire Glied vor Glied wie folget

2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29
29 + 26 + 23 + 20 + 17 + 14 + 11 + 8 + 5 + 2

31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31 + 31

welche gefundene und aus lauter gleichen Gliedern bestehende Reihe offenbahr zweymal so groß ist als die Summa unserer Progression. Die Anzahl dieser gleichen Glieder ist 10, eben wie in der Progression, und also ist derselben Summa = 10. 31 = 310. Da nun diese Summa zwey mal so groß ist, als die Summa der Arithmetischen Progression, so wird die rechte Summa seyn = 155.

416.

Wann man auf diese Art mit einer jeglichen Arithmethischen Progression verfährt, wovon das erste Glied = a, das letzte = z, und die Anzahl der Glieder = n, indem man eben dieselbe Progression rückwerts darunter schreibt und Glied vor Glied addirt, so bekommt man für jedes Glied a + z, deren Anzahl = n, folglich ist die Summa derselben = n (a + z) welche zweymal so groß ist, als die Summa der Progression, dahero ist die Summa der Arithmetischen Progression selbst = $\frac{n(a+z)}{2}$.

417.

Hieraus erlangen wir nun diese leichte Regul um die Summa einer jeglichen Arithmetischen Progression zu finden:

Man multiplicire die Summa des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl der Glieder, so wird die Hälfte dieses Products die Summa der gantzen Progression anzeigen.

Oder welches auf eins läuft: man multiplicire die Summa des ersten und letzten Glieds mit der halben Anzahl der Glieder.

Oder auch, man multiplicire die halbe Summa des ersten und letzten Glieds, mit der gantzen Anzahl der Glieder, so bekommt man die Summa der gantzen Progression.

418.

Es ist nöthig diese Regul mit einigen Exempeln zu erläutern. Es sey demnach gegeben die Progression der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, bis 100, von welchen die Summa gesucht werden soll. Diese wird nach der ersten Regul seyn $\frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$.

Es wird ferner gefragt, wie viel Schläge eine Schlag-Uhr in 12 Stunden thue? zu diesem Ende müßen die Zahlen 1, 2, 3, bis 12, zusammen addirt werden, die Summa wird also seyn $\frac{12 \cdot 13}{2} = 6.13 = 78$.

Wollte man die Summa von eben dieser Reihe bis 1000 fortgesetzt, wißen, so würde dieselbe herauskommen 500500; bis 10000 fortgesetzt, wird dieselbe seyn = 50005000.

419.

Frage. Einer kauft ein Pferd mit dieser Bedingung; für den ersten Huffnagel zahlt er 5 Copeken, für den zweyten 8, für den dritten 11, und immer 3 Copeken mehr für einen jeden folgenden. Es sind aber in allem 32 Nägel, wie theuer kommt ihm das Pferd zu stehen?

Hier wird also die Summa von einer Arithmetischen Progression, deren erstes Glied 5, die Differenz = 3, und die Anzahl der Glieder = 32 ist, gesuchet.

Hier muß nun zuförderst das letzte Glied gesucht werden, welches nach obiger Regul gefunden wird = 5 + 31. 3 = 98, und hieraus ergiebt sich die gesuchte Sum-

Summa $\frac{107 \cdot 72}{2} = 103.16$; also kommt das Pferd 1648 Copeken, oder 16 Rbl. 48 Cop. zu stehen.

420.

Es sey aufeine allgemeine Art das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$, und die Anzahl der Glieder $= n$, woraus die Summa der gantzen Progression gefunden werden soll: da nun das letzte Glied seyn muß $= a + (n-1)d$, so ist die Summa des ersten und letzten Gliedes $= 2a + (n-1)d$, welche mit der Anzahl der Glieder n multiplicirt, giebt $2na + n(n-1)d$, daher die gesuchte Summa seyn wird $= na + \frac{n(n-1)}{2} d$.

Nach dieser Formel, weil in dem obigen Exempel $a = 5$, $d = 3$, und $n = 32$ war, so erhält man die Summa $5.32 + \frac{31 \cdot 32 \cdot 3}{2} = 160 + 1488 = 1648$ wie vorher.

421.

Wann die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3 und so fort bis n zusammen addirt werden soll, so hat man um diese Summa zu finden, das erste Glied $= 1$, das letzte $= n$ und die Anzahl der Glieder $= n$, woraus die Summa gefunden wird $\frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Setzt man $n = 1766$,

so

so wird die Summa aller Zahlen von 1 bis 1766 seyn $= 883.1767 = 1560261$.

422.

Es sey gegeben die Progression der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 etc. welche bis auf n Glieder fortgesetzt sind, wovon die Summa verlangt wird:

Hier ist nun das erste Glied $= 1$, die Differenz $= 2$, die Anzahl der Glieder $= n$; daraus wird das letzte Glied seyn $1 + (n-1)2 = 2n-1$, daraus erhält man die gesuchte Summa $= nn$.

Folglich darf man nur die Anzahl der Glieder mit sich selbst multipliciren. Man mag also von dieser Progression so viel Glieder zusammen addiren als man will, so ist die Summa immer ein Quadrat, nemlich das Quadrat der Anzahl der Glieder, wie aus folgendem zu ersehen.

Glied.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10 etc.
Prog.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19 etc.
Sum.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100 etc.

423.

Es sey ferner das erste Glied $= 1$, die Differenz $= 3$ und die Anzahl der Glieder $= n$, so hat man diese

diese Progression 1, 4, 7, 10 etc. wovon das letzte Glied seyn wird: $1+(n-1)3=3n-2$; daher die Summa des ersten und letzten Glieds $=3n-1$; folglich die Summa der Progression $\frac{n(3n-1)}{2}=\frac{3nn-n}{2}$. Nimmt man $n=20$, so ist die Summa $=10.59=590$.

424.

Es sey das erste Glied $=1$, die Differenz $=d$, und die Anzahl der Glieder $=n$, so wird das letzte Glied seyn $1+(n-1)d$. Hierzu das erste addirt, giebt $2+(n-1)d$, mit der Anzahl der Glieder multiplicirt $2n+n(n-1)d$, woher die Summa der Progression seyn wird $n+\frac{n(n-1)d}{2}$.

Hier wollen wir folgendes Täfelgen anhängen,

wann $d=1$, so ist die Summa $= n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{nn+n}{2}$

$d=2$ — — — — — $n+\frac{2n(n-1)}{2}=nn$

$d=3$ — — — — — $n+\frac{3n(n-1)}{2}=\frac{3nn-n}{2}$

$d=4$ — — — — — $n+\frac{4n(n-1)}{2}=2nn-n$

$d=5$ — — — — — $n+\frac{5n(n-1)}{2}=\frac{5nn-5n}{2}$

$d=6$ — — — — — $n+\frac{6n(n-1)}{2}=3nn-2n$

$d=7$ — — — — — $n+\frac{7n(n-1)}{2}=\frac{7nn-5n}{2}$

wann

wann $d = 8$ so ist die Summa $n + \frac{8n(n-1)}{2} = 4nn - 3n$

$d = 9$ — — — — — $n + \frac{9n(n-1)}{2} = \frac{9nn-7n}{2}$

$d = 10$ — — — — — $n + \frac{10n(n-1)}{2} = 5nn - 4n$

etc.

Capitel 5.

Von den figurirten oder vieleckigten Zahlen.

425.

Die Summation der Arithmetischen Progressionen, welche von 1 anfangen und deren Differenz entweder 1 oder 2 oder 3 oder eine andere beliebige gantze Zahl ist, leitet uns auf die Lehre von den vieleckigten Zahlen, welche entstehen, wann man einige Glieder von solchen Progressionen zusammen addirt.

426.

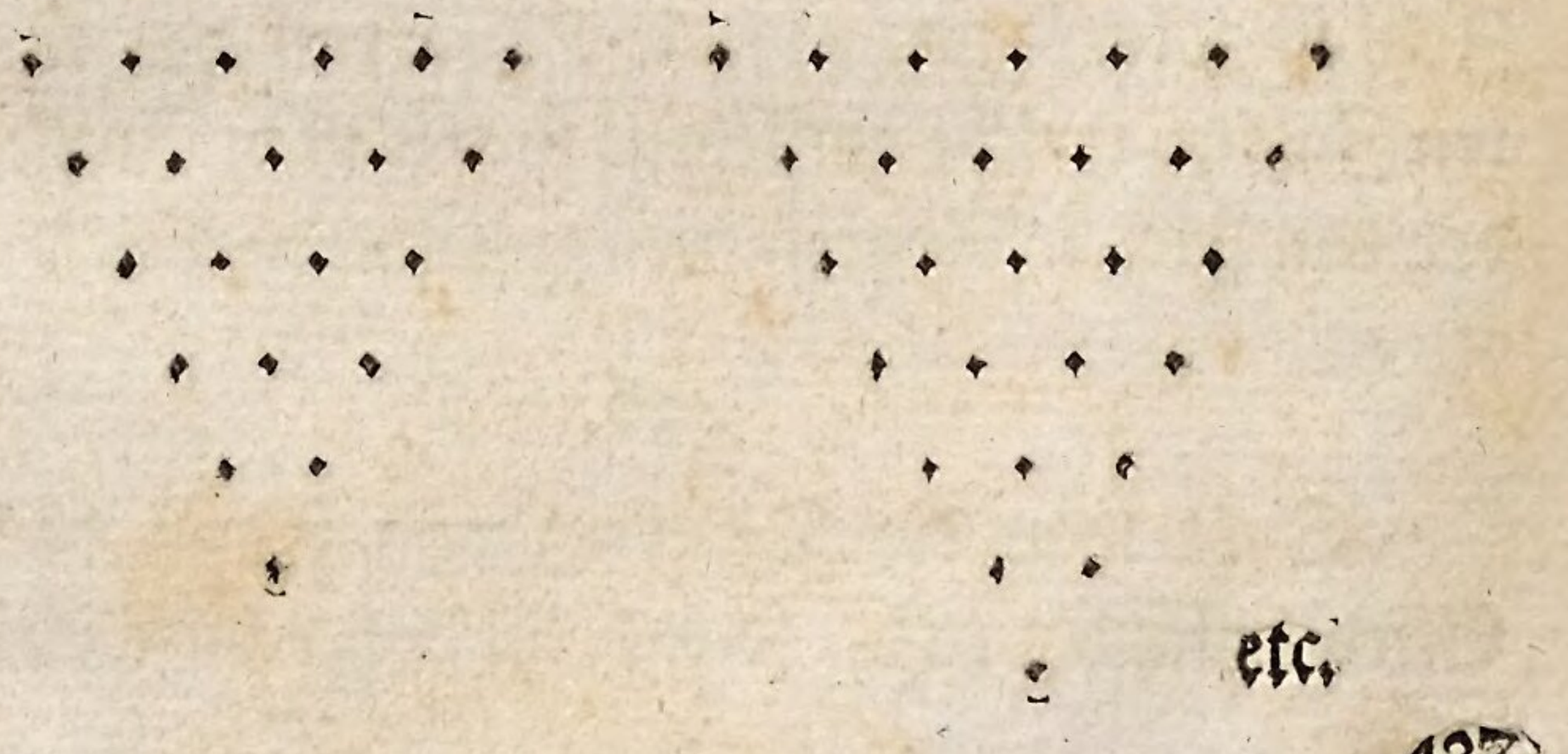
Setzt man die Differenz $= 1$, indem das erste Glied beständig 1 ist, so entsteht daher diese Arithmetische

tische Progression = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 etc. Nimmt man nun in derselben die Summa von einem, zweyen, dreyen, vieren etc. Gliedern, so entsteht daraus diese Reihe von Zahlen

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 etc.

Also daß 1 = 1, 3 = 1 + 2, 6 = 1 + 2 + 3, 10 = 1 + 2 + 3 + 4 etc. Und es werden diese Zahlen dreyeckigte Zahlen genennet, weil sich, so viel Punkte als eine solche Zahl anzeigt durch ein dreyeck vorstellen laßen, wie aus folgendem zu ersehen,

1. 3. 6. 10. 15.

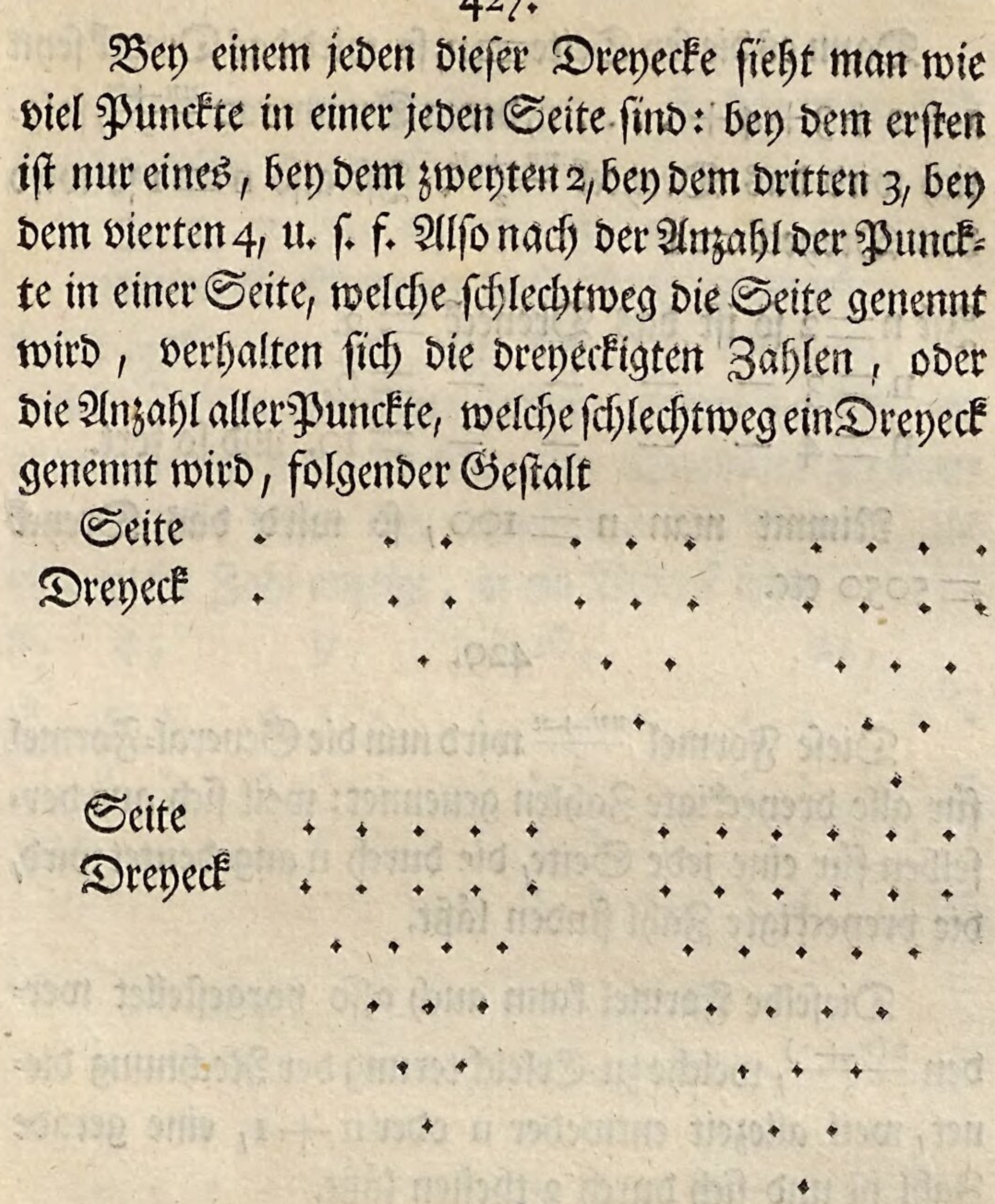


21. 28.

etc.

427.

Bey einem jeden dieser Dreyecke sieht man wie viel Punckte in einer jeden Seite sind: bey dem ersten ist nur eines, bey dem zweyten 2, bey dem dritten 3, bey dem vierten 4, u. s. f. Also nach der Anzahl der Punckte in einer Seite, welche schlechtweg die Seite genennt wird, verhalten sich die dreyeckigten Zahlen, oder die Anzahl aller Punckte, welche schlechtweg ein Dreyeck genennt wird, folgender Gestalt



428.

Hier kommt also die Frage vor, wie aus der gegebenen Seite das Dreyeck gefunden werden soll? welches aus dem obigen leicht geschehen kann:

Dann es die sey Seite = n, so wird das Dreyck seyn $1+2+3+4+\ldots$ n, deren Summe = $\frac{nn+n}{2}$, folglich wird das Dreyeck $\frac{nn+n}{2}$. Ist also n = 1 so wird das Dreyeck = 1

Ist n = 2 so ist das Dreyeck = 3.
n = 3 — — — — = 6.
n = 4 — — — — = 10. und so fort.

Nimmt man n = 100, so wird das Dreyck = 5050 etc.

429.

Diese Formel $\frac{nn+n}{2}$ wird nun die General-Formel für alle dreyeckigte Zahlen genennet: weil sich aus derselben für eine jede Seite, die durch n angedeutet wird, die dreyeckigte Zahl finden läßt.

Dieselbe Formel kann auch also vorgestellet werden $\frac{n(n+1)}{2}$, welche zu Erleichterung der Rechnung dienet, weil allezeit entweder n oder n + 1, eine gerade Zahl ist und sich durch 2 theilen läßt.

Also wann n = 12, so ist das Dreyeck = $\frac{12.13}{2}$ = 6. 13 = 78. Ist n = 15, so ist das Dreyeck = $\frac{15.16}{2}$ = 15. 8 = 120. etc.

430.

430.

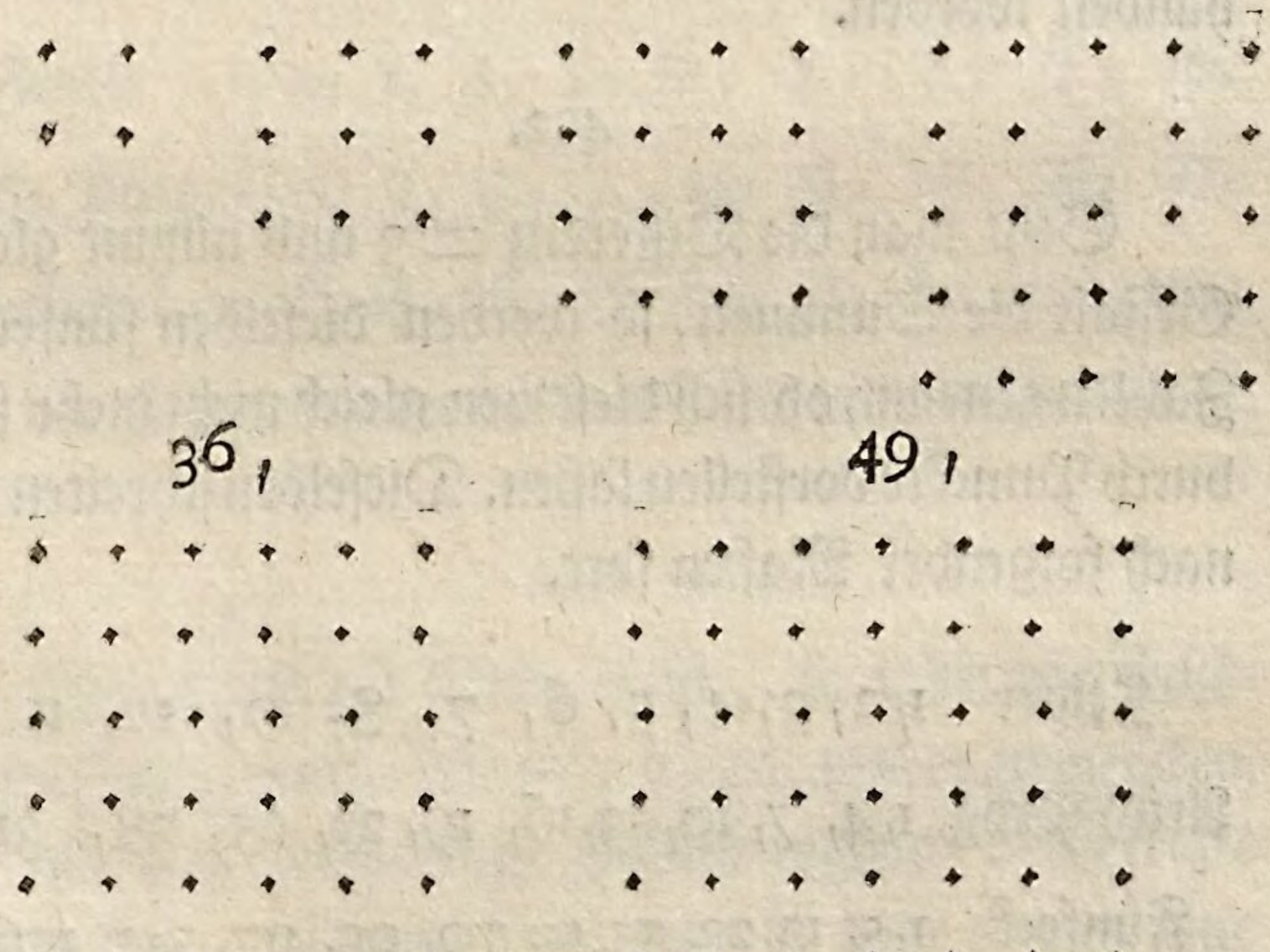
Setzt man die Differenz = 2 so hat man diese Arithmetische Progression

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 etc.

wovon die Summen diese Reihe ausmachen

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, etc.

welche Zahlen viereckigte Zahlen genennt werden, und eben diejenige sind, welche oben Quadrate genennet worden; Es lassen sich nehmlich so viel Punckte, als eine solche Zahl anzeigt, in ein Viereck setzen:



431.

Hier sieht man, daß die Seite eines solchen Vierecks eben so viel Puncte enthält, als die Quadrat-Wurzel davon anzeigt, also ist von der Seite 5 das Viereck 25, und von der Seite 6 das Viereck 36; überhaupt aber wann die Seite n ist, wodurch die Anzahl der Glieder dieser Progression 1, 3, 5, 7 etc. bis n angedeutet wird, so ist das Viereck die Summe derselben Glieder, welche oben gefunden worden = nn. Von diesem Viereck oder Quadrat aber ist schon oben ausführlich gehandelt worden.

432.

Setzt man die Differenz = 3 und nimmt gleicher Gestalt die Summen, so werden dieselben fünfeckigte Zahlen genennt, ob sich dieselben gleich nicht mehr so net durch Puncte vorstellen laßen. Dieselben schreiten demnach folgender Maßen fort.

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11
Arith Prog.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25,	28,	31
Fünfeck	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92,	117,	145,	176 etc.

und der Zeiger weißt die Seite einer jeglichen.

433.

433.

Wann also die Seite n gesetzt wird, so ist die fünfeckigte Zahl $= \frac{3nn-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$. Wann z. E. $n = 7$ so ist das Fünfeck 70. Will man die fünfeckigte Zahl von der Seite 100 wißen, so setzt man $n = 100$ und bekommt 14950.

434.

Setzt man die Differenz $= 4$, so erhält man auf diese Art die sechseckigte Zahlen, welche also fortschreiten.

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Arith. Prog.	1,	5,	9,	13,	17,	21,	25,	29,	33,	37.
Sechseck	1,	6,	15,	28,	45,	66,	91,	120,	153,	190.

Wo der Zeiger wiederum die Seite eines jeden giebt.

435.

Wann also die Seite n ist, so wird die sechseckigte Zahl $= 2nn - n = n(2n-1)$, wobey zu mercken, daß alle diese sechseckigte Zahlen zugleich dreyeckigte Zahlen sind. Dann wann man in diese immer eine überspringt so erhält man die sechseckigte.

436.

Auf gleiche weise findet man die siebeneckigte, achteckigte, neuneckigte Zahlen, und so fort. Von welchen wir die General-Formeln hier insgesammt hersetzen wollen. Wann also die Seite n ist so wird seyn

das Dreyeck $= \frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Viereck $= \frac{2nn+0n}{2} = nn$

V eck $= \frac{3nn-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$

VI eck $= \frac{4nn-2n}{2} = 2nn-n = n(2n-1)$

VII eck $= \frac{5nn-3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2}$

VIII eck $= \frac{6nn-4n}{2} = 3nn-2n = n(3n-2)$

IX eck $= \frac{7nn-5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2}$

X eck $= \frac{8nn-6n}{2} = 4nn-3n = n(4n-3)$

XI eck $= \frac{9nn-7n}{2} = \frac{n(9n-7)}{2}$

$$\text{XII eck} = \frac{10nn-8n}{2} = 5nn-4n = n(5n-4)$$

$$\text{XX eck} = \frac{18nn-16n}{2} = 9nn-8n = n(9n-8)$$

$$\text{XXV eck} = \frac{23nn-21n}{2} = \frac{n(23n-21)}{2}$$

$$\text{m eck} = \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$$

407.

Wann also die Seite n ist, so hat man auf eine allgemeine Art die m eckigte Zahl $= \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$ woraus man alle nur mögliche vieleckigte Zahlen finden kann, deren Seite = n. Wollte man daraus die zweyeckigte Zahlen finden, so würde m = 2 und dieselbe = n seyn.

Setzt man m = 3 so wird die III eckigte Zahl $= \frac{nn+n}{2}$
Setzt man m = 4 so wird die IV eckigte Zahl = nn etc.

438.

Um diese Regul mit einigen Exempeln zu erläutern, so suche man die XXV eckigte Zahl, deren Seite 36 ist?

Man suche erstlich vor die Seite n die XXV eckigte Zahl, so wird dieselbe $= \frac{23nn-21n}{2}$. Nun setze man $n = 36$, so bekommt man die gesuchte Zahl $= 14526$.

439.

Frage. Einer hat ein Haus gekauft und wird gefragt wie theuer? darauf antwortet er, die Zahl der Rubel, die er dafür bezahlet, sey die 365 eckigte Zahl von 12.

Um nun diese Zahl zu finden so wird $m = 365$ und also das 365 eck von $n = \frac{363nn-361n}{2}$. Nun ist $n = 12$, woraus der gesuchte Preis des Haußes seyn wird 23970 Rubel.

Capitel 6.

Von dem Geometrischen Verhältniß.

440.

Das Geometrische Verhältniß zwischen zweyen Zahlen enthält die Antwort auf die Frage, wie viel mal die eine Zahl größer sey als die andere? und wird gefunden, wann man die eine durch die andere dividirt, da dann der Quotient die Benennung des Verhältnißes anzeigt.

441.

Es kommen demnach bey einem Geometrischen Verhältniß drey Sachen zu betrachten vor. Erstlich, die erste der beyden vorgegebenen Zahlen, welche der Vorsatz genennet wird. Zweytens, die andere derselben, welche der Nachsatz genennt wird. Drittens, die Benennung des Verhältnißes, welche gefunden wird, wann man den Vorsatz durch den Nachsatz dividirt: als wann zwischen den Zahlen 18 und 12 das Verhältniß angezeigt werden soll, so ist 18 der Vorsatz, 12 der Nach-

satz und die Benennung wird seyn $\frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$; woraus man erkennt, daß der Vorsatz 18 den Nachsatz 12, einmal und noch $\frac{1}{2}$ mal in sich begreiffe.

442.

Um das Geometrische Verhältniß zwischen zweyen Zahlen anzuzeigen, bedient man sich zweyer über einander gesetzten Punckte, welche zwischen dem Vorsatz und Nachsatz gesetzt werden.

Also a : b zeigt das Verhältniß zwischen a und b an, welches Zeichen, wie schon oben bemerckt worden, auch die Division anzuzeigen pflegt, und eben deswegen hier gebraucht wird, weil um dieses Verhältniß zu erkennen, die Zahl a durch b getheilt werden muß: dieses Zeichen wird also mit Worten ausgesprochen; a verhält sich zu b, oder schlecht weg a zu b.

443.

Die Benennung eines solchen Verhältnißes wird demnach durch einen Bruch vorgestellt, dessen Zehler der Vorsatz, der Nenner aber der Nachsatz ist. Um der Deutlichkeit willen aber muß man diesen Bruch immer in seine kleinste Form bringen, welches geschieht, wann man den Zehler und Nenner durch ihren größ-

ten

ten gemeinen Theiler theilet, wie oben geschehen, da der Bruch $\frac{18}{12}$ auf $\frac{3}{2}$ ist gebracht worden indem man den Zehler und Nenner durch 6 getheilt hat.

444.

Die Verhältniße sind also nur in so fern unterschieden, als ihre Benennung verschieden ist, und es giebt daher so viel verschiedene Arten von Verhältnißen, als verschiedene Benennungen gefunden werden können.

Die erste Art ist nun ohnstreitig, wann die Benennung 1 wird; und dieses geschieht, wann die beyden Zahlen gleich sind, als 3 : 3, 4 : 4, a : a wovon die Benennung 1 wird, und deswegen das Verhältniß der Gleichheit genennt wird.

Hierauf folgen diejenigen deren Benennung eine ganze Zahl wird, als 4 : 2 wo die Benennung 2 ist. Ferner 12 : 4 wo die Benennung 3 ist, und 24 : 6 wo die Benennung 4 ist etc.

Hernach kommen solche vor, deren Benennung durch Brüche ausgedrückt werden. Als 12 : 9 dessen Benennung $\frac{4}{3}$ oder $1\frac{1}{3}$ ist : 18 : 27 dessen Benennung $\frac{2}{3}$ ist etc.

445.

445.

Es sey nun a der Vorsatz, b der Nachsatz und die Benennung d, so haben wir schon gesehen, daß wann a und b gegeben, daraus gefunden werde $d = \frac{a}{b}$.

Ist aber der Nachsatz b nebst der Benennung d gegeben, so findet man daraus den Vorsatz $a = bd$ weil bd durch b dividirt d giebt, endlich wann der Vorsatz a nebst der Benennung d gegeben ist, so findet man daraus den Nachsatz $b = \frac{a}{d}$. Dann wann man den Vorsatz a durch diesen Nachsatz $\frac{a}{b}$ dividiret, so ist der Quotus d, das ist die Benennung.

446.

Ein jedes Verhältniß a : b bleibt ohnverändert, wann man den Vorsatz und Nachsatz mit einerley Zahl entweder multiplicirt oder dividirt, weil die Benennung einerley bleibt. Dann wann d die Benennung von a : b ist, also daß $d = \frac{a}{b}$, so ist auch von diesem Verhältniß na : nb die Benennung $\frac{a}{b} = d$; und von diesem Verhältniß $\frac{a}{n} : \frac{b}{n}$ ist die Benennung gleichfals $\frac{a}{b} = d$.

447.

Wann die Benennung in die kleinste Form gebracht worden, so läßt sich daraus das Verhältniß deut=

deutlich erkennen und mit Worten ausdrücken. Nemlich wann die Benennung auf diesen Bruch $\frac{p}{q}$ gebracht worden so sagt man; a:b = p:q das ist mit Worten a zu b wie p zu q. Also da von diesem Verhältniß 6:3 die Benennung $\frac{2}{1}$ ist oder 2 so hat man 6:3 = 2:1. Eben so sagt man 18:12 = 3:2 und 24:18 = 4:3 und ferner 30:45 = 2:3. Läßt sich aber die Benennung nicht abkürzen, so wird auch das Verhältniß nicht deutlicher: dann wann man sagt 9:7=9:7 so wird es nicht begreiflicher.

448.

Wann sich aber die Benennung auf sehr kleine Zahlen bringen läßt, so erhält man eine deutliche Erkenntniß von einem Verhättniß zwischen zwey sehr großen Zahlen. Also wann man sagt 288:144 = 2:1, so ist die Sache gantz deutlich und; wann man fragt wie sich 105:70 verhalte, so antwortet man wie 3:2. Fragt man weiter wie sich 576:252 verhalte, so antwortet man wie 16:7.

449.

Um also ein jedes Verhältniß auf das deutlichste vorzustellen, so muß man die Benennung deßelben

auf

auf die geringste Zahlen zu bringen suchen, welches auf einmal geschehen kann, wann die beyden Glieder des Verhältnißes durch ihren größten gemeinen Theiler dividiret werden. Also das Verhältniß 576 : 252 wird auf einmal zu diesem 16 : 7 gebracht, wann man die beyden Zahlen 576 und 252 durch 36, welches ihr größter gemeiner Theiler ist, dividiret.

450.

Weil nun die Sache darauf ankommt, daß man von zwey gegebenen Zahlen ihren größten gemeinen Theiler zu finden wiße, so soll dazu in dem folgendem Capitel die nöthige Anleitung gegeben werden.

Capitel

Capitel 7.

Von dem größten gemeinen Theiler zweyer gegebenen Zahlen.

451.

Es giebt Zahlen, welche außer 1 keinen andern gemeinschaftlichen Theiler haben, und wann Zehler und Nenner eines Bruchs so beschaffen sind, so läßt sich derselbe auch in keine leichtere Form bringen.

Also sieht man, daß diese beyden Zahlen 48 und 35 keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, ohngeachtet ein jede vor sich ihre besondere Theiler hat. Deswegen kann auch das Verhältniß 48:35 nicht leichter ausgedrückt werden, dann ob gleich sich beyde durch 1 theilen laßen, so werden doch dadurch die Zahlen nicht kleiner.

452.

Wann aber die Zahlen einen gemeinen Theiler haben, so wird derselbe, und so gar der größte gemeine Theiler durch folgende Regul gefunden.

Man

Man dividire die größere Zahl durch die kleinere; durch den überbleibenden Rest dividire man ferner den vorhergehenden Divisor, durch den hier überbleibenden Rest dividire man wieder den letzt vorhergehenden Divisor, und auf solche Art verfahre man so lang bis die Division aufgeht; da dann der letzte Divisor der größte gemeine Theiler der beyden gegebenen Zahlen seyn wird.

Diese Untersuchung wird für die vorgesetzte Zahlen 576 und 252 also zu stehen kommen.

252	576	2
	504	
72	252	3
	216	
36	72	2
	72	
	0	

Hier ist also der größte gemeine Theiler 36.

453.

Es wird dienlich seyn diese Regul durch einige Exempel zu erläutern. Man suche demnach den größten gemeinen Theiler zwischen den Zahlen 504 und 312.

312.

312	504	1
	312	
192	312	1
	192	
120	192	1
	120	
72	120	1
	72	
48	72	1
	48	
24	48	2
	48	
	0	

Also ist 24 der größte gemeine Theiler, und deswegen läßt sich das Verhältniß 504 : 312 auf diese Form 21 : 13 bringen.

454.

Es seyen ferner diese zwey Zahlen gegeben 625 : 529, für welche der größte gemeine Theiler gesucht werden soll :

529	625	1
	529	
96	529	5
	480	
49	96	1
	49	
47	49	1
	47	
2	47	23
	46	
1	2	2
	2	
0		

Hier ist also der grösste gemeine Theiler 1, und deswegen läßt sich das Verhältniß 625 : 529 auf keine leichtere Form bringen: oder daßelbe läßt sich durch keine kleinere Zahlen ausdrücken.

455.

Es ist nun noch nöthig den Beweis von dieser Regul zu geben. Es sey a die größere und b die kleinere von den gegebenen Zahlen, d aber ein gemeiner Theiler derselben. Da sich nun so wohl a als b durch d theilen laßen, so wird sich auch a — b dadurch theilen

len laßen, auch a — 2b und a — 3b, und überhaupt a — nb.

456.

Dieses ist auch rückwärts wahr, und wann die Zahlen b und a — nb sich durch d theilen laßen, so muß sich auch die Zahl a dadurch theilen laßen. Dann da sich nb theilen läßt, so würde sich a — nb nicht theilen laßen, wann sich nicht auch a theilen ließe.

457.

Ferner ist zu mercken, daß wann d der größte gemeine Theiler von den beyden Zahlen b und a — nb ist, derselbe auch der größte gemeine Theiler von den Zahlen a und b seyn werde. Dann wann für diese Zahlen a und b noch ein größerer gemeiner Theiler als d statt fände, so würde derselbe auch ein gemeiner Theiler von b und a — nb, folglich d nicht der größte seyn. Nun aber ist d der größte gemeine Theiler von b und a — nb also muß auch d der größte gemeine Theiler von a und b seyn.

458.

Diese drey Sätze voraus gesetzt, so laßt uns die größere Zahl a durch die kleinere b, wie die Regul befiehlt, theilen, und für den Quotus n annehmen, so erhält

hält man den Rest a — nb, welcher immer kleiner ist als b. Da nun dieser Rest a—nb mit dem Divisor b eben denselben grösten gemeinen Theiler hat als die gegebene Zahlen a und b, so theile man den vorigen Divisor b durch diesen Rest a — nb, und da wird wiederum der herauskommende Rest mit dem nächst vorhergehenden Divisor eben denselben grösten gemeinen Theiler haben, und so immer weiter.

459.

Man fährt aber solcher Gestalt fort, bis man auf eine solche Division kommt, welche aufgeht oder wo kein Rest übrig bleibt. Es sey demnach p der letzte Divisor, welcher just etliche mahl in seinem Dividend enthalten ist, dahero das Dividend durch p theilbar, und folglich diese Form mp haben wird; diese Zahlen nun p und mp laßen sich beyde durch p theilen, und haben gantz gewis keinen grösern gemeinen Theiler, weil sich keine Zahl durch eine grösere, als sie selbst ist, theilen läßt. Dahero ist auch der letzte Divisor der grösste gemeine Theiler der beyden im Anfang gegebenen Zahlen a und b, welches der Beweis der vorgeschriebenen Regul ist.

460.

460.

Laßt uns noch ein Exempel hersetzen und von diesen Zahlen 1728 und 2304 den größten gemeinen Theiler suchen, da dann die Rechnung wie folget zu stehen kommen wird.

1628	2304	1
	1728	
576	1728	3
	1728	
	0	

Also ist 576 der größte gemeine Theiler, und das Verhältniß 1728:2304 wird auf dieses gebracht 3:4; folglich verhält sich 1728:2304 eben so wie 3:4.

Capitel 8.

Von den Geometrischen Proportionen.

461.

Zwey Geometrische Verhältniße sind einander gleich, wann ihre Benennungen einander gleich sind: und die Gleichheit zweyer solchen Verhältniße wird eine Geometrische Proportion genennt, welche also geschrieben wird, $a:b=c:d$, mit Worten aber wird dieselbe also ausgesprochen: a verhält sich zu b wie sich c verhält zu d, oder a zu b wie c zu d. Ein Exempel einer solchen Proportion ist nun $8:4=12:6$. Dann von dem Verhältniß $8:4$ ist die Benenunng $\frac{2}{1}$, und ebenfals ist sie es auch von dem Verhältniß $12:6$.

462.

Wann also $a:b=c:d$ eine Geometrische Proportion ist, so muß beyderseits eine gleiche Benennung statt finden und folglich $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ seyn; und hinwiederum wann die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ einander gleich sind, so ist $a:b=c:d$.

463.

463.

Eine Geometrische Proportion besteht demnach aus vier Gliedern welche also beschaffen sind, daß das erste durch das zweyte dividirt eben so viel ist, als das dritte durch das vierte dividirt. Hieraus folget eine sehr wichtige Haupt-Eigenschaft aller Geometrischen Proportionen, welche darin besteht, daß das Product aus dem ersten und vierten Glied immer eben so groß ist, als das Product aus dem zweyten und dritten. Oder kürzer, daß das Product der äußern gleich ist dem Product der mittlern Gliedern.

464.

Um diese Eigenschaft zu beweisen, so sey $a:b=c:d$ eine Geometrische Proportion, und also $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Man multiplicire einen jeden dieser Brüche mit b, so bekommt man $a=\frac{bc}{d}$, diese multiplicirt man ferner beyderseits mit d, so bekommt man $ad=bc$. Nun aber ist ad das Product der äußern Glieder und bc das Product der mittlern, welche beyde Producte folglich einander gleich sind.

465.

Wann hinwiederum vier Zahlen a, b, c, d, so beschaffen sind, daß das Product der äußern ad gleich ist

dem Product der mittlern bc, so stehen dieselben in einer Geometrischen Proportion. Dann da ad = bc so dividire man beyderseits durch bd, da bekommt man $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; dahero wird a:b = c:d.

466.

Die vier Glieder einer Geometrischen Proportion als a:b = c:d können auf verschiedene Arten versetzt werden, so daß die Proportion bleibt. Es kommt nehmlich nur darauf an, daß das Product der äußern Gliedern dem Product der mittlern gleich bleibe, oder daß ad = bc. Also wird man haben, erstlich b:a = d:c, zweytens a:c = b:d, drittens d:b = c:a, viertens d:c = b:a.

467.

Außer diesen laßen sich auch noch viele andere Geometrische Proportionen herleiten. Dann wann a:b = c:d, so ist erstlich a+b:a oder das erste + dem andern zum ersten, wie c+d:c oder das dritte + dem vierten zum dritten; nemlich a+b:a = c+d:c.

Hernach ist auch das erste — dem andern zum ersten, wie das dritte — dem vierten zum dritten; oder a—b:a = c—d:c.

Dann nimmt man die Producte der äußern und mittlern Gliedern, so ist offenbahr ac-bc = ac-ad, weil ad = bc.

Ferner

Ferner wird auch a—b : b = c—d : d, weil ad—bd = bc—bd und ad = bc ist.

468.

Alle hergeleitete Proportionen die aus a : b = c : d entstehen, können auf eine allgemeine Art also vorgestellt werden ma + nb : pa + qb = nc + nd : pc + qd. Dann das Product der äußern Gliedern ist mpac + npbc + mqad + nqbd, oder weil ad = bc, so wird dasselbe mpac + npbc + mqbc + nqbd; das Product der mittlern Gliedern aber ist mpac + mqbc + npad + nqbd, oder weil ad = bc so wird dasselbe mpac + mqbc + npbc + nqbd, welches mit jenem einerley ist.

469.

Also kann man aus einer gegebenen Proportion als z. E. 6 : 3 = 10 : 5, unendlich viel andere herleiten, wovon wir einige hersetzen wollen.

3 : 6 = 5 : 10, 6 : 10 = 3 : 5, 9 : 6 = 15 : 10,
3 : 3 = 5 : 5, 9 : 15 = 3 : 5, 9 : 3 = 15 : 5,

470.

Da in einer Geometrischen Proportion das Product der äußern dem Product der mittlern Gliedern gleich ist,

so kann man, wann die drey ersten Glieder bekannt sind, aus derselben das vierte finden. Es seyen die drey ersten Glieder 24 : 15 = 40 zu .... Dann da hier das Product der mittlern 600 ist, so muß das vierte Glied mit dem ersten das ist mit 24 multiplicirt auch 600 machen, folglich muß man 600 durch 24 dividiren, und da wird der Quotus das gesuchte vierte Glied 25 geben. Dahero ist die Proportion 24 : 15 = 40 : 25. Und wann allgemein die drey ersten Glieder a : b = c : ... sind, so setze man für das unbekante vierte Glied den Buchstaben d, und da ad = bc seyn muß, so dividire man beyderseits durch a und man wird bekommen $d = \frac{bc}{a}$; folglich ist das vierte Glied $= \frac{bc}{a}$, und wird gefunden wann man das zweyte Glied mit dem dritten multiplicirt und das Product durch das erste Glied dividirt.

471.

Hierauf beruhet nun der Grund der in allen Rechen-Büchern so berühmten Regeldetri, weil darin aus drey gegebenen Zahlen allezeit eine solche vierte gesucht wird, welche mit jenen in einer Geometrischen Proportion stehet, also daß sich die erste verhalte zur zweyten, wie die dritte zur vierten

472.

472.

Hierbey kommen noch einige besondere Umstände zu bemercken vor: als wann zwey Proportionen einerley erstes und drittes Glied haben, wie in diesen a:b=c:d und a:f=c:g so werden auch die zweyten den vierten proportional seyn, es wird sich nemlich verhalten b:d =f:g; dann da aus der ersten folgt a:c=b:d, und aus der andern a:c=f:g, so sind die Verhältniße b:d und f:g einander gleich, weil ein jedes dem Verhältniße a:c gleich ist. Also da 5:100=2:40 und 5:15=2:6, so folgt daraus daß 100:40=15:6.

473.

Wann aber zwey Proportionen so beschaffen sind daß sich einerley mittlere Glieder darin befinden, so werden sich die ersten Glieder umgekehrt verhalten wie die vierten. Wann nemlich a:b=c:d und f:b=c:g, so wird daraus folgen a:f=g:d. Es sey z. E. diese Proportion gegeben 24:8=9:3 und 6:8=9:12, so wird daraus folgen 24:6=12:3. Der Grund davon ist offenbahr: weil die erste giebt ad=bc und die zweyte fg=bc, folglich wird ad=fg, und a:f=g:d, oder a:g=f:d.

474.

474.

Aus zwey gegebenen Proportionen aber kann immer eine neue gemacht werden, wann man besonders die ersten und die zweyten, die dritten und die vierten Glieder mit einander multiplicirt. Also aus diesen Proportionen a:b = c:d und e:f = g:h entstehet durch die Zusammensetzung diese ae:bf = cg:dh. Dann da erstlich ad = bc und aus der zweyten eh = fg, so wird auch seyn adeh = bcfg. Nun aber ist adeh das Product der äußern und bcfg das Product der mittlern Gliedern in der neuen Proportion, welche folglich einander gleich sind.

475.

Es seyn z. E. diese zwey Proportionen gegeben 6:4 = 15:10 und 9:12 = 15:20 so giebt uns derselben Zusammensetzung folgende Proportion

6. 9 : 4. 12 = 15. 15 : 10. 20

das ist 54 : 48 = 225 : 200

oder 9 : 8 = 9 : 8

476.

Zuletzt ist hier noch zu mercken, daß wann zwey Producte einander gleich sind, als ad = bc, daraus hinwiederum eine Geometrische Proportion formiret werden

den kann. Es ist nemlich immer der eine Factor des ersten Products zu einem des zweyten, wie der andere Factor des zweyten zum andern des ersten. Es wird nemlich seyn a:c = b:d. Da z. E. 3.8 = 4.6 so folgt daraus diese Proportion 8:4 = 6:3 oder 3:4 = 6:8; und da 3.5 = 1.15, so bekommt man 3:15 = 1:5 oder 5:1 = 15:3 oder 3:1 = 15:5.

Capitel 9.

Anmerkungen über die Proportionen und ihren Nutzen.

477.

Diese Lehre ist in dem allgemeinen Handel und Wandel von solcher Nothwendigkeit, daß fast niemand dieselbe entbehren kann. Die Preiße und Waaren sind einander immer proportional und bey den verschiedenen Geld-Sorten kommt alles darauf an, die Verhältniße darzwischen zu bestimmen. Dieses wird sehr dienlich seyn um die vorgetragene Lehre beßer zu erläutern und zum Nutzen anzuwenden.

478.

478.

Will man das Verhältniß zwischen zweyen Münz-Sorten z. E. einem Louisdor und einem Ducaten erforschen, so muß man sehen wie viel diese Stücke nach einerley Müntz-Sorte gelten. Also da in Berlin ein Louisdor 5 Rthl. 8 Gl. ein Ducaten aber 3 Rthl. gilt so darf man diese beyden Werthe nur auf einerley Müntze bringen, entweder auf Thaler und da bekommt man diese Proportion 1 L.: 1 D. = $5\frac{1}{3}$ Rthl.: 3 Rthl. d. i. wie 16:9. Oder in Groschen hat man diese Proportion 1 L.: 1 D. = 128:72 = 16:9, und aus einer solchen Proportion erhält man die Vergleichung zwischen Louisdors und Ducaten, indem die Gleichheit der Producte der äußern und mittlern Glieder giebt 9 Louisdor = 16 Ducaten; und durch Hülffe dieser Vergleichung kann man eine jede Summe Louisdor in Ducaten verwandeln. Also wann man gefragt wird, wie viel 1000 Louisdor in Ducaten betragen, so macht man diese Regeldetri. 9 L'd'or thun 16 Ducat. was 1000 L'd'or: Antwort; $1777\frac{7}{9}$ Duc.

Fragt man aber wie viel 1000 Duc. in L'd'or betragen so setzt man diese Regeldetri; 16 Duc. thun 9 L'd'or was 1000. Antwort; $562\frac{1}{2}$ L'd'or.

479.

479.

Hier in St. Petersburg ist der Werth eines Ducaten veränderlich und beruhet auf den Wechsel-Cours, wodurch der Werth eines Rubels in Holländische Stüber bestimmt wird, deren 105 einen Ductaen ausmachen.

Wann also der Cours 45 Stüber ist, so hat man diese Proportion 1 Rbl.: 1 D. = 45:105 = 3:7, und daher diese Vergleichung; 7 Rbl. = 3 Duc. Hieraus kann man finden wie viel ein Ducaten in Rubel betrage: dann, 3 D.:7 Rbl. = 1 D.: ... Antwort $2\frac{1}{3}$ Rubel. Ist aber der Cours 50 Stüber so hat man diese Proportion 1 Rbl.: 1 D. = 50:105 = 10:21, und daher diese Vergleichung 21 Rbl. = 10 Duc. Hieraus wird 1 Duc. = $2\frac{1}{10}$ Rubl. Ist aber der Cours nur 44 Stüber, so hat man 1 Rbl.: 1 Duc. = 44:105, und also 1 Duc. = $2\frac{17}{44}$ Rbl. = 2 Rbl. $38\frac{7}{11}$ Cop.

480.

Hieraus kann man auch mehr als zwey verschiedene Müntz-Sorten unter sich vergleichen, welches insonderheit bey Wechseln häufig geschieht. Um davon ein Exempel zu geben, so soll jemand von hier 1000 Rubel nach Berlin übermachen, und will wißen, wie viel solches in Berlin in Ducaten betragen werde. Es

ist

ist aber der hiesige Cours $47\frac{1}{2}$ Stüber (nemlich ein Rbl. macht $47\frac{1}{2}$ Stüber Holländisch). Hernach in Holland macheu 20 Stüber einen Fl. Holl. Ferner $2\frac{1}{2}$ Fl. Holl. machen einen Species Rthl. Holl. Ferner ist der Cours von Holland nach Berlin 142, das ist für 100 Spec. Rthl. zahlt man in Berlin 142 Rthlr. Endlich gilt 1 Duc. in Berlin 3 Rthlr.

481.

Um diese Frage aufzulösen, so wollen wir erstlich schritt vor schritt gehen. Wir fangen also bey den Stübern an, und da 1 Rbl. = $47\frac{1}{2}$ Stüber, oder 2 Rbl. = 95 Stb. so setzt man, 2 Rbl. : 95 Stb. = 1000 ... Antwort 47500 Stüb. Ferner gehen wir weiter und setzen 20 Stüb. : 1 Fl. = 47500 Stüber: .... Antwort 2375 Fl. Ferner da $2\frac{1}{2}$ Fl. = 1 Sp. Rthl, das ist, da 5 Fl. = 2 Sp. Rthl. so setzt man 5 Fl. : 2 Sp. Rthl. = 2375 Fl. zu .... Antwort 950 Sp. Rthl.

Ferner gehen wir auf Berliner Rthl. nach dem Cours zu 142: Also 100 Sp. Rhtl. : 142 Rhtl. = 950 : Antwort 1349 Rthl.

Nun gehen wir endlich zu den Ducaten und setzen also; 3 Rthl : 1 Ducaten = 1349 Rthl. zu ... Antwort $449\frac{2}{3}$ Ducaten.

482.

482.

Um solche Rechnungen noch mehr zu erläutern, so wollen wir setzen der Banquier zu Berlin mache Schwierigkeit diese Summe zu bezahlen, unter einem oder andern Vorwand was es auch für einer seyn mag, und wolle diesen Wechsel nicht anders als mit 5 Procent Abzug bezahlen. Dieses ist aber also zu verstehen, daß er anstatt 105 nur 100 bezahlt, daher muß noch diese Regeldetri hinzugefügt werden, 105 : 100 = $449\frac{2}{3}$ zu .... Giebt allso $428\frac{16}{63}$ Ducaten.

483.

Hierzu wurden nun sechs Rechnungen nach der Regeldetri erfordert: man hat aber Mittel gefunden diese Rechnungen ungemein abzukürtzen durch Hülfe der sogenanten Ketten-Regel. Um dieselbe zu erklären, so laßt uns von den sechs obigen Rechnungen die zwey Vorder-Sätze in Betrachtung ziehen und hier vor Augen legen:

I.) 2 Rbl. : 95 Stüb:	II.) 20 Stüb : 1 Fl. Holl.
III.) 5 Fl. Holl. : 2 Sp. Rthl.	IV.) 100 Sp. Rthl. : 142 Rthl.
V.) 3 Rthl. : 1 Sp. Ducaten	VI.) 105 Duc. : 100 Duc.

Wann wir nun die obige Rechnungen betrachten so finden wir, daß wir die vorgegebene Summe immer durch die zweyten Sätze multiplicirt und durch

die ersten dividirt haben; daraus ist klar, daß man eben dieses finden werde, wann man die vorgegebene Summe auf einmahl mit dem Product aller zweyten multiplicirt und durch das Product aller ersten Sätze dividirt; oder wann man diese einzige Regeldetri macht: wie sich das Product aller ersten Sätze verhält zu dem Product aller zweyten Sätze, also verhält sich die gegebene Anzahl Rubel zu der Anzahl Ducaten die in Berlin bezahlt wird.

484.

Diese Rechnung wird noch mehr abgekürzt, wann sich irgend ein erster Satz gegen irgend einen zweyten Satz aufheben läßt, da man dann dieselben Sätze ausstreicht und an ihrer Stelle die Quotus setzt, welche man durch die Aufhebung erhält: Auf diese Art wird obiges Exempel also zu stehen kommen

Rbl.	7.	19 øß	St. Holl. Cur.	1000 Rbl.
	7ø.	1	Hol. Fl.	
	5.	7	Sp. Rthl.	
	100.	142	Rthl.	
	3.	1	Duc.	
	7ø.	21. 5, 7øø	Duc.	
	63øø :	2698	10øø zu ...	
		7) 26980		
		9) 3854 (2		
		428 (2	Antwort 428 $\frac{16}{63}$ Ducaten	

485.

485.

Um die Ketten-Regel zu gebrauchen, so muß man diese Ordnung beobachten ; man fängt mit eben der Münz Sorte an von welcher die Frage ist und vergleicht dieselbe mit einer andern, mit welcher das folgende Verhältniß wieder angefangen , und dieselbe mit einer dritten verglichen wird, so daß ein jedes Verhältniß mit eben der Müntz-Sorte anfängt, mit welcher das vorige aufgehört, und so fährt man fort bis man auf diejenige Sorte kommt, in welcher die Antwort stehen soll, und zuletzt werden noch die Spesen oder Unkosten berechnet.

486.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch etliche Fragen beysetzen.

Wann die Ducaten in Hamburg 1 p. C. beßer sind als 2 Rthl. B° (das ist, wenn 50 Duc. nicht 100, sondern 101 Rthl. B°. machen) und der Cours zwischen Hamburg und Königsberg 119 Gr. Poln. ist (das ist, 1 Rthl. B°. macht 119 Gr. Poln.) wie viel betragen 100 Duc. in Fl. Pol. (30 gr. Pol. machen 1 Fl. Pol.)

Duc. 1 : 2 Rthl. B° 1000 Duc.

1ØØ, 50 : 101 Rthl. B°
1 : 119 Gl. Pol.
30 : 1 Fl. Pol.

15ØØ 12019 = 10ØØ Duc. zu ...

3) 120190

5) 40063 (1

8012 (3 Antwort 8012 $\frac{2}{3}$ Duc. fl. Pol.

487.

Noch zu mehrerer Abkürzung kann die Frag-Zahl über die zweyte Reihe gesetzt werden, da dann das Product der zweyten Reihe, durch das Product der ersten dividirt die verlangte Antwort giebt.

Frage: Leipzig läßt aus Amsterdam Ducaten kommen, welche daselbst 5 Fl. 4 St. Courant gelten (das ist, ein Duc. gilt 104 St. oder 5 Duc. machen 26 Fl. Hol.) Wann nun Agio di B° in Amsterdam 5 p. C. (das ist 105 Cour. macht 100 B°.) und der Wechsel-Cours von Leipzig nach Amsterdam in B°. $133\frac{1}{4}$ p. C. (das ist für 100 Rthl. zahlt man in Leipzig $133\frac{1}{4}$ Thl.) Endlich 2 Rthl. Hol. 5 Fl. Hol. thun, wie viel sind nach diesen Coursen vor solche 1000 Ducaten in Leipzig an Thl. zu bezahlen.

Duc.

5, 1000 Duc.

Duc. 5 : 26 Fl. Hol. Cour.

1051, 21 : 4, 20, 100 Fl. Hol. B°

5 : 2 Rthl. Hol. B°

400, 1 : 533 Thl. in Leipzig

21 : 3) 55432 (1
7) 18477 (4
2639

Antwort 2639 $\frac{13}{21}$ Thl.
oder 2639 Thl. 15 gut. Grsch.

Capitel 10.

Von den zusammengesetzten Verhältnißen.

488.

Zwey oder mehr Verhältniße werden zusammengesetzt, wann man so wohl die Vorder-Sätze als die Hinter-Sätze besonders mit einander multiplicirt; und alsdann sagt man, daß das Verhältniß zwischen diesen beyden Producten zusammengesetzt sey aus den zwey oder mehr gegebenen Verhältnißen.

Also aus diesen Verhältnißen a:b, c:d, e:f entsteht durch die Zusammensetzung dieses Verhältniß ace:bdf.

489.

Da ein Verhältniß einerley bleibt, wann man seine beyde Glieder durch einerley Zahl dividirt oder abkürzt, so kann man die obige Zusammensetzung ungemein erleichtern, wann man die Vorder-Sätze gegen die Hinter-Sätze aufhebt oder abkürzt, wie schon im vorigen Capitel geschehen.

Also aus folgenden gegebenen Verhältnißen wird das daraus zusammengesetzte solcher Gestalt gefunden.

Die gegebenen Verhältniße sind.

12 : 25, 28 : 33 und 55 : 56

12, 4, 2 : 5 28
28 : 3, 33
88, 8 : 2, 56

2 : 5

Also erhält mau durch die Zusammensetzung dieses Verhältniß 2 : 5.

490.

Eben dieses geht auch auf eine allgemeine Art bey den Buchstaben an; und ist insonderheit dieser Fall merckwürdig, wo immer ein Vorder-Satz dem vorigen Hinter-Satz gleich ist. Also wann die gegebenen Verhältnißen sind.

a : b

a : b
b : c
c : d
d : e
e : a

---

so ist das zusammengesetzte Verhältniß wie 1 : 1

491.

Um den Nutzen dieser Lehre zu zeigen, so bemercke man, daß zwey viereckigte Felder unter sich ein solches Verhältniß haben, welches zusammengesetzt ist aus den Verhältnißen ihrer Längen und ihrer Breiten.

Es seyen z. E. zwey solche Felder A und B. Von jenem sey die Länge 500 Fuß, die Breite aber 60 Fuß. Von diesem sey die Länge 360 Fuß und die Breite 100 Fuß; so ist das Verhältniß der Länge wie 500 : 360 und der Breite wie 60 : 100. Also stehet es

5ØØ, 5 : 6, 3ØØ
ØØ : 1ØØ

5 : 6

Also verhält sich das Feld A zu dem Feld B wie 5 zu 6.

492.

Ein anderes Exempel. Das Feld A sey 720 Fuß lang und 88 Fuß breit: das Feld B aber sey 660 Fuß lang

und 90 Fuß breit, so muß man folgende zwey Verhältnisse zusammensetzen

Verhältniß der Längen	12, 8	:	15, 20, 200
Verhältniß der Breiten	80, 8, 2	:	80

16 : 15

Und dieses ist das Verhältniß der Felder A und B.

493.

Um ferner den Raum oder Inhalt zweyer Zimmer gegen einander zu vergleichen, so ist zu wißen daß ihr Verhältniß aus dreyen zusammengesetzt ist. Nemlich aus dem Verhältniß der Länge, der Breite und der Höhe. Es sey z. E. ein Zimmer A, deßen Länge = 36 Fuß, die Breite = 16 Fuß und die Höhe = 14 Fuß. Von einem andern Zimmer B aber sey die Länge = 42 Fuß, die Breite = 24 Fuß und die Höhe = 10 Fuß, so sind die drey Verhältniße.

der Länge	36, 6, 3	:	42, 6
der Breite	16, 2,	:	24, 3
der Höhe	14, 2,	:	10, 5

4 : 5

Also ist der Inhalt des Zimmers A zu dem Inhalt des Zimmers B wie 4 zu 5.

494.

494.

Wann die Verhältniße, welche man solcher Gestalt zusammensetzt, einander gleich sind, so entstehen daher vervielfältigte Verhältniße. Nemlich aus zwey gleichen entsteht ein verdoppeltes oder quadratisches Verhältniß; aus drey gleichen ein dreyfältiges oder cubisches, und so fort. Also aus den Verhältnißen a : b und a : b ist das zusammengesetzte Verhältniß aa : bb; dahero sagt man die Quadraten stehen in einer gedoppelten Verhältniß ihrer Wurzel. Und aus dem Verhältniß a : b dreymal gesetzt, entsteht das Verhältniß $a^3 : b^3$, dahero sagt man daß die Cubi, ein dreyfältiges Verhältniß ihrer Wurzel haben.

495.

In der Geometrie wird gezeigt, daß sich zwey Circkelrunde Plätze in den gedoppelten Verhältnißen ihrer Durchmeßer verhalten, das will so viel sagen, daß sie sich verhalten wie die Quadrate ihrer Durchmeßer.

Es sey ein solcher Platz A deßen Durchmeßer = 45 Fuß, eines andern Circkelrunden Platzes B aber Durchmeßer sey = 30 Fuß, so wird sich jener Platz zu diesem ver-

halten wie 45. 45 zu 30. 30, oder ihr Verhältniß ist aus diesen zwey gleichen Verhältnißen zusammengesetzt

45, 9, 3 : 30, 6, 2
45, 9, 3 : 30, 6, 2

9 : 4

Folglich verhalten sich diese Plätze wie 9 zu 4.

496.

Ferner wird auch bewiesen, daß sich die Inhalte runder Kugeln, wie die Cubi ihrer Durchmeßer verhalten. Wann also der Durchmeßer einer Kugel A ein Fuß ist, und einer andern Kugel B zwey Fuß ist, so wird der Inhalt der Kugel A sich zum Inhalt der Kugel B verhalten wie $1^3 : 2^3$ oder wie 1 : 8.

Wann also diese Kugeln aus einerley Materie bestehen, so wird die Kugel B achtmahl schwerer seyn als die Kugel A.

497.

Hieraus kann man das Gewicht der Kanonen-Kugeln aus ihren Durchmeßern finden, wann man nur von einer das Gewicht hat. Es sey zum Exempel eine Kugel A, deren Durchmeßer = 2 Zoll, und die fünf ℔ schwer ist, man fragt nach dem Gewicht einer andern Kugel B, deren Durchmeßer = 8 Zoll ist. Hier hat man nun diese Proportion $2^3 : 8^3 = 5 :$

Giebt

Giebt 320 ℔, und dieses ist das Gewicht der Kugel B. Von einer andern Kugel C aber, deren Durchmeßer = 15 Zoll wird das Gewicht gefunden

$2^3 : 15^3 = 5 : \ldots$ Antwort $2109\frac{3}{8}$ ℔.

498.

Sucht man das Verhältniß zweyer Brüche, als $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ so kann dasselbe immer durch gantze Zahlen ausgedrückt werden: dann man darf nur beyde Brüche mit bd multipliciren, so kommt dieses Verhältniß ad : bc heraus welches jenem gleich ist, dahero diese Proportion ensteht $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$. Läßt sich nun ad gegen bc noch abkürtzen, so wird das Verhältniß noch leichter. Also $\frac{15}{24} : \frac{25}{36} = 15.36 : 24.25 = 9 : 10$.

499.

Es wird ferner gefragt wie sich diese Brüche $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ gegen einander verhalten, da ist dann so gleich klar daß seyn werde $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a$, welches also mit Worten ausgesprochen wird; Daß sich zwey Brüche deren Zehler 1 sind unter sich verhalten umgekehrt wie ihre Nenner. Dieses gilt auch von zweyen Brüchen, welche gleiche Zehler haben. Dann da $\frac{c}{a} : \frac{c}{b} = b : a$, so sind sie

gleich-

gleichfalls umgekehrt wie ihre Nenner. Haben aber zwey Brüche gleiche Nenner, als $\frac{a}{c} : \frac{b}{c}$, so verhalten sie sich wie die Zehler nemlich wie a:b. Also ist $\frac{3}{8} : \frac{3}{16} = \frac{6}{16} : \frac{3}{16}$ $= 6 : 3 = 2 : 1$ und $\frac{10}{7} : \frac{15}{7} = 10 : 15$ oder $2 : 3$.

500.

Bey dem freyen Fall der Cörper hat man bemercket, daß in einer Secunde ein Cörper 15 Fuß tief herab falle, in zwey Secunden aber falle er durch eine Höhe von 60 Fuß, und in drey Secunden 135 Fuß, daraus hat man nun geschlossen, daß sich die Höhen verhalten wie die Quadraten der Zeiten; und also auch rückwerts die Zeiten wie die Quadrat-Wurzeln aus den Höhen.

Fragt man nun wie viel Zeit ein Stein brauche um aus einer Höhe von 2160 Fuß herunter zu fallen: so ist $15 : 2160 = 1 :$ Quadrat der gesuchten Zeit.

Also ist das Quadrat der gesuchten Zeit 144, die Zeit aber selbst 12 Secunden.

501.

Man fragt, wie tief ein Stein in einer Stunde herunter fallen könne, das ist in 3600 Secunden?

Man sagt also: wie die Quadraten der Zeiten, das

ist

ist wie $1^2 : 3600^2$ also verhält sich die gegebene Höhe = 15 Fuß, zu der gesuchten Höhe.

1 : 12960000 = 15 zu ...

15

64800000

1296

194400000 Antwort 194400000 Fuß.

Rechnen wir nun 24000 Fuß auf eine teutsche Meile, so wird diese Höhe seyn 8100 Meilen, welche Höhe größer ist als die gantze Erde dicke ist.

502.

Eine gleiche Bewandtniß hat es mit dem Preis der Edelgesteine, welche sich nicht nach ihrem Gewicht selbst, sondern nach einem größern Verhältniß richten. Bey den Diamanten gilt diese Regul, daß sich der Preiß wie das Quadrat des Gewichts verhalte, oder das Verhältniß der Preiße ist gleich dem gedoppelten Verhältnisse des Gewichts. Dieselben werden nun nach einem Gewicht, welches ein Karath genennt wird, und vier Gran hält, gewogen. Wann nun ein Diamant von einem Karath zwey Rubel gilt, so wird ein Diamant von 100 Karath so viel mal mehr gelten, als das Qua-

drat

drat von 100 größer ist wie das Quadrat von 1. Also muß die Regeldetri so gesetzt werden

$1^2 : 100^2 = 2$ Rubel:

oder 1 : 10000, = 2 Rbl. zu ... Antwort 20000 Rbl.

In Portugal befindet sich ein Diamant von 1680 Karath deßen Preiß demnach also gefunden wird.

$1^2 : 1680^2 = 2$ Rubel, : — oder

1 : 2822400 = 2 : .... Antwort 5644800 Rubel.

503.

Von zusammengesetzten Verhältnißen geben die Posten ein merckwürdiges Exempel, weil das Post-Geld nach einem zusammengesetzten Verhältniße der Zahl der Pferde, und der Zahl der Meilen bezahlt werden muß. Wann also für ein Pferd auf eine Meile 8 Gl. oder $\frac{1}{3}$ Rthl. bezahlt wird, und man wißen will wie viel vor 28 Pferde auf $4\frac{1}{2}$ Meile bezahlt werden soll? so setzt man erstlich das Verhältniß der Pferde, das ist 1:28 darunter schreibt man das Verhältniß der Meilen 2:9 und setzt die zwey Verhältniße zusammen

2:252 oder kürtzer 1:126 $= \frac{1}{3}$ zu ... Antwort 42 Rthl.

Wann man für 8 Pferde auf 3 Meilen einen Ducaten bezahlt, wie hoch kommen 30 Pferde auf 4 Meilen zu stehen? hier kommt die Rechnung also zu stehen.

℔, ℥ : ℨ℔, ⅋℔, 5
ℨ : ℔

1 : 5 = 1 Ducaten : —

Dahero ist die Bezahlung 5 Ducaten.

504.

Bey den Arbeitern kommt diese Zusammensetzung der Verhältniße auch vor, da die Bezahlung nach der zusammengesetzten Verhältniß der Zahl der Arbeiter, und der Zahl der Tage geschehen muß.

Wann also zum Exempel einem Mäurer täglich 10 Gr. gegeben wird und man will wißen, wie viel an 24 Mäurer, welche 50 Tage lang gearbeitet haben, bezahlt werden soll? so steht die Rechnung also

1 : 24
1 : 50

1 : 1200 = 10 Gl. : 500 Rthl.
10

12000 Gl.
3)
4000
8)
500 Rthl.

Weil

Weil in dergleichen Exempeln fünf Sätze gegeben sind so wird in den Rechen-Büchern die Art dieselben zu berechnen die Regula Quinque genennt.

Capitel II.

Von den Geometrischen Progressionen.

505.

Eine Reihe Zahlen, welche immer gleich vielmal größer oder kleiner werden, wird eine Geometrische Progression genennt, weil immer ein jedes Glied zu dem folgenden in eben demselben Geometrischen-Verhältniße stehet, und die Zahl welche anzeigt wie viel mal ein jedes Glied größer ist, als das vorhergehende, wird der Nenner genennt, wann also das erste Glied 1 ist und der Nenner = 2, so ist die Geometrische-Progression folgende.

Glieder 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Prog. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 etc.

506.

wo wir die Zeichen darüber gesetzt haben um anzuzeigen das wie vielte Glied ein jedes sey.

506.

Wann man überhaupt das erste Glied = a und den Nenner = b setzt, so kommt die Geometrische Progression also zu stehen:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. . . n

Prog: $a, ab, ab^2, ab^3, ab^4, ab^5, ab^6, ab^7 \ldots ab^{n-1}$

Wann also diese Progression aus n Gliedern besteht, so ist das letzte $= ab^{n-1}$. Hier ist zu mercken, wann der Nenner b gröſser ist als 1, daß die Glieder immer gröſser werden, ist aber der Nenner b = 1 so bleiben die Glieder immer einander gleich, und ist der Nenner b kleiner als 1, oder ein Bruch, so werden die Glieder auch immer kleiner. Also wann a = 1 und $b = \frac{1}{2}$, so bekommt man diese Geometrische Progression:

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}$ etc.

507.

Hierbey kommen nach folgende Stücke zu betrachten vor

I.) das erste Glied, welches hier a genennt wird
II.) der Nenner, welcher hier b genennt wird
III.) die Anzahl der Glieder welche = n gesetzt worden
IV.) das letzte Glied, welches gefunden worden = ab^{n-1}.

Dahero wann die drey ersten Stücke gegeben sind, so wird das letzte Glied gefunden wann man die $n-1^{te}$ Potestät das Nenners b, das ist b^{n-1}, mit dem ersten Glied a multiplicirt.

Wollte man nun von dieser Geometrischen Progrssion: 1, 2, 4, 8, etc. das 50te Glied wißen, so ist hier a = 1, b = 2 und n = 50. Dahero das 50te Glied seyn wird = 2^{49}. Da nun $2^5 = 512$, so ist $2^{10} = 1024$. Hiervon das Quadrat genommen giebt $2^{20} = 1048576$. Hiervon wieder das Quadrat genommen giebt $2^{40} = 1099511627776$. Wann man nun 2^{40} mit $2^9 = 512$ multiplicirt, so bekommt man $2^{49} = 512.\ 1099511627776 = 562949953421312$.

508.

Hiebey pflegt nun insonderheit gefragt zu werden, wie man die Summe von allen Gliedern einer solchen Progression finden soll, welches wir hier folgender Gestalt zeigen wollen. Es sey erstlich diese Progression von zehn Gliedern gegeben 1, 2, 4, 8,
16,

16, 32, 64, 128, 256, 512 wovon wir die Summe durch den Buchstaben s andeuten wollen, also daß

$$s = 1+2+4+8+16+32+64+128+256+512$$

so wird dieses doppelt genommen geben:

$$2s = 2+4+8+16+32+64+128+256+512+1024.$$

Hiervon nehme man nun die obige Progression weg, so bleibt übrig:

$s = 1024 - 1 = 1023$; also ist die gesuchte Summe $= 1023$.

509.

Laßt uns nun bey eben dieser Progression die Anzahl der Glieder unbestimmt annehmen und $= n$ setzen, also daß die Summe seyn wird $s = 1+2+2^2+2^3 \ldots . 2^{n-1}$. Dieses mit 2 multiplicirt giebt $2s = 2+2^2+2^3+2^4 \ldots . 2^n$ von diesen subtrahirt man jenes so bekommt man $s = 2^n - 1$. Dahero wird die gesuchte Summe gefunden, wann man das letzte Glied 2^{n-1} mit dem Nenner 2 multiplicirt um zu bekommen 2^n, und von diesem Product 1 subtrahirt.

510.

Dieses wollen wir durch folgende Exempel, indem wir vor n nach und nach 1, 2, 3, 4, schreiben wer-

werden, erläutern als $1 = 1$, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 4 = 7$, $1 + 2 + 4 + 8 = 15$, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$. etc.

511.

Hier pflegt diese Frage vorzukommen: Einer verkauft sein Pferd nach den Huffnägeln, deren 32 sind: für den ersten Nagel fordert er 1 Pfennig, für den zweyten 2 Pfennig, für den dritten 4 Pfennig, für den vierten 8 Pfennig und immer für den folgenden zwey mal so viel als für den vorigen. Nun ist die Frage, wie hoch dieses Pferd verkauft worden?

Hier muß also diese Geometrische Progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc. bis auf das 32te Glied fortgesetzt und die Summe von allen gesucht werden. Da nun das letzte Glied seyn wird $= 2^{31}$, so ist oben schon gefunden worden $2^{20} = 1048576$, dieses multiplicirt man mit $2^{10} = 1024$, um zu haben $2^{30} = 1073741824$. Dieses mit 2 multiplicirt giebt das letzte Glied $2^{31} = 2147483648$; folglich wird die Summe gleich seyn dieser Zahl doppelt genommen weniger 1: das ist 4294967295 Pfenige

2) 4294967295 Pf.

6) 2147483647 l.

oder 357913941 Gl. 3 Pf.

3) 357913941

8) 119304647

oder 14913080 Rthl. 21 Gl. 3 Pf.

Also wird der Preiß des Pferdes seyn 14913080 Rthl. 21 Gl. 3 Pf.

512.

Es sey nun der Nenner = 3 und die Geometrische Progression sey 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, und von diesen 7 Gliedern soll die Summe gefunden werden. Man setze dieselbe so lange = s, also daß:

$$s = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729.$$

Man multiplicire mit 3 um zu haben

$$3s = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187.$$

Hiervon subtrahire man die obige Reihe, so bekommt man $2s = 2187 - 1 = 2186$. Dahero ist die gedoppelte Summe = 2186 und folglich die Summe 1093.

513.

In eben dieser Progression sey die Anzahl der Glieder = n und die Summe = s, also daß $s = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots 3^{n-1}$ dieses mit 3 multiplicirt giebt $3s = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots 3^n$ Hievon sub-

subtrahire man das obige, und weil sich alle Glieder der untern Reihe, außer den letzten, gegen alle Glieder der obern, außer den ersten, aufheben, so bekommt man $2f = 3^n - 1$ und also $f = \frac{3^n - 1}{2}$.

Also wird die Summe gefunden, wann man das letzte Glied mit 3 multiplicirt, vom Product 1 subtrahirt und denn Rest durch 2 theilt wie aus folgenden Exempeln zu ersehen; $1 = 1$, $1 + 3 = \frac{3 \cdot 3 - 1}{2} = 4$, $1 + 3 + 9 = \frac{3 \cdot 9 - 1}{2} = 13$, $1 + 3 + 9 + 27 = \frac{3 \cdot 27 - 1}{2} = 40$, $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = \frac{3 \cdot 81 - 1}{2} = 121$.

514.

Nun sey auf eine allgemeine Art das erste Glied $= a$, der Nenner $= b$, die Anzahl der Glieder $= n$ und die Summe derselben $= f$, also daß

$$f = a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \ldots ab^{n-1}.$$

Dieses werde multiplicirt mit b so bekommt man $bf = ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \ldots ab^n$. Hiervon subtrahire man das obige so erhält man $(b-1).f = ab^n - a$. Daher bekommt man die gesuchte Summe $f = \frac{ab^n - a}{b-1}$. Dahe-

ro

ro wird die Summe einer jeglichen Geometrischen Progression gefunden wann man das letzte Glied mit dem Nenner der Progression multiplicirt, von dem Product das erste Glied subtrahirt und den Rest durch den Nenner weniger 1 dividirt.

515.

Man habe eine Geometrische Progression von 7 Gliedern; das erste $=3$ und der Nenner $=2$, so ist $a=3$, $b=2$ und $n=7$ folglich das letzte Glied 3.2^6 das ist $3.64=192$. und die Progression selbst

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192.$$

und also das letzte Glied 192 mit dem Nenner 2 multiplicirt, giebt 384, davon das erste Glied 3 subtrahirt bleibt 381, dieser Rest durch $b-1$, das ist, durch 1 dividirt, giebt 381, welches die Summe der Progression ist.

516.

Es sey ferner gegeben eine Geometrische Progression von sechs Gliedern, davon das erste 4 und der Nenner $\frac{3}{2}$. Also daß die Progression ist

$$4, 6, 9, \frac{27}{2}, \frac{81}{4}, \frac{243}{8}$$

dieses letzte Glied $\frac{243}{8}$ mit dem Nenner $\frac{3}{2}$ multi-

plicirt giebt $\frac{729}{16}$, davon das erste Glied 4 subtrahirt giebt $\frac{665}{16}$, endlich dieser Rest dividirt durch $b-1 = \frac{1}{2}$ giebt $\frac{665}{8} = 83\frac{1}{8}$.

517.

Wann der Nenner kleiner ist als 1 und also die Glieder der Progression immer abnehmen, so kann die Summe einer solchen Progression die ohne Ende fortläuft angegeben werden.

Es sey z. E. das erste Glied $= 1$ der Nenner $= \frac{1}{2}$ und die Summ $= s$, also daß

$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ etc. ohne Ende.

Man multiplicire mit 2 so bekommt man:

$2s = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ etc. ohne Ende,

hiervon ziehe man das obige ab, so bleibt $s = 2$ welches die Summe der unendlichen Progression ist.

518.

Es sey ferner das erste Glied $= 1$, der Nenner $\frac{1}{3}$ und die Summ $= s$ also daß

$s = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ etc. ohne Ende.

Man multiplicire alles mit 3 so hat man

$3s = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ etc. ohne Ende.

Hievon nehme man die obige Reihe weg so bleibt

$2s = 3$ folglich ist die Summe $= 1\frac{1}{2}$.

519.

519.

Es sey ferner das erste Glied $= 2$ der Nenner $= \frac{3}{4}$ die Summe $= s$ also daß $s = 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128}$ etc. ohne Ende. Dieses multiplicire man mit $\frac{4}{3}$ so hat man $\frac{4}{3} s = \frac{8}{3} + 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128}$ etc. ohne Ende. Hiervon das obige subtrahirt bleibt $\frac{1}{3} s = \frac{8}{3}$, also die Summe selbsten wird seyn just 8.

520.

Wann überhaupt das erste Glied gesetzt wird $= a$ und der Nenner der Progression $= \frac{b}{c}$, so daß dieser Bruch kleiner ist als 1 und folglich b kleiner ist als c, so kann die Summe dieser unendlichen Progression folgender Gestalt gefunden werden. Man setzt

$$s = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ etc. ohne Ende.}$$

Hier multiplicirt man mit $\frac{b}{c}$, so kommt man

$$\frac{b}{c} s = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ etc. ohne End.}$$

Dieses subtrahirt man von dem obigen so bleibt

$$\left(1 - \frac{b}{c}\right) s = a$$

folglich ist $s = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}}$

Multiplicirt man nun oben und unten mit c, so be-

kommt man $f = \frac{ac}{c-b}$ dahero ist die Summe dieser unend-

lichen Geometrischen Progression $= \frac{a}{1 - \frac{b}{c}}$ oder $= \frac{ac}{c-b}$.

Diese Summe wird folglich gefunden wann man das erste Glied a dividirt durch 1 weniger dem Nenner; oder man subtrahirt den Nenner von 1, und durch den Rest dividirt man das erste Glied so bekommt man die Summe.

521.

Wann in solchen Progressionen die Zeichen + und − mit einander abwechseln so kann die Summe auf eben dieselbe Art gefunden werden. Dann es sey

$$f = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ etc.}$$

dieses multiplicire man mit $\frac{b}{c}$ so bekommt man:

$$\frac{b}{c} f = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4} \text{ etc.}$$

dieses addire man zu dem obigen, da erhält man $(1 + \frac{b}{c}) f = a$. Hieraus findet man die gesuchte Summe

$$f = \frac{a}{1 + \frac{b}{c}} \text{ oder } f = \frac{ac}{c+b}.$$

522.

Es sey z. E. das erste Glied $a = \frac{3}{5}$ und der Nenner der Progression $= \frac{2}{5}$ das ist $b = 2$ und $c = 5$ so wird von dieser Reihe $\frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{12}{125} + \frac{24}{625}$ etc. die

Summe

Summe also gefunden: der Nenner von 1 subtrahirt bleibt $\frac{3}{5}$, dadurch muß man das erste Glied $\frac{3}{5}$ dividirt, so bekommt man die Summe $= 1$.

Wann aber die Zeichen $+$ und $-$ abwechseln und diese Reihe vorgelegt ist:

$$\frac{3}{5} - \frac{6}{25} + \frac{12}{125} - \frac{24}{625} \text{ etc.}$$

so wird die Summe seyn

$$\frac{a}{1 + \frac{b}{c}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{7}$$

523.

Zur Uebung soll diese unendliche Progression vorgelegt seyn

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} \text{ etc.}$$

Hier ist das erste Glied $\frac{3}{10}$ und der Nenner $\frac{1}{10}$. Dieser von 1 subtrahirt bleibt $\frac{9}{10}$. Hierdurch das erste Glied dividirt giebt die Summe $= \frac{1}{3}$.
Nimmt man nur ein Glied $\frac{3}{10}$, so fehlt noch $\frac{1}{10}$.
Nimmt man zwey Glieder $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} = \frac{33}{100}$ so fehlt noch $\frac{1}{100}$ zu $\frac{1}{3}$ etc.

524.

Wann diese unendliche Reihe gegeben ist:

$$9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} \text{ etc.}$$

so ist das erste Glied 9, der Nenner $\frac{1}{10}$. Also 1 weniger

den

den Nenner ist $\frac{9}{10}$. Hierdurch das erste Glied 9 dividirt, so wird die Summe $= 10$. Hier ist zu mercken, daß diese Reihe durch einen Decimal-Bruch also vorgestellet wird 9, 9999999 etc.

Capitel 12.

Von den unendlichen Decimal-Brüchen.

525.

Wir haben oben gesehen, daß bey den Logarithmischen Rechnungen anstatt der gemeinen Brüche Decimal-Brüche gebraucht werden; welches auch bey den andern Rechnungen mit großem Vortheil geschehen kann. Es kommt also darauf an zu zeigen, wie ein gemeiner Bruch in einen Decimal Bruch verwandelt werde, und wie man den Werth eines Decimal-Bruchs hinwiederum durch einen gemeinen Bruch ausdrücken soll.

526.

Es sey auf eine allgemeine Art der gegebene Bruch $\frac{a}{b}$, welcher in einem Decimal-Bruch verwandelt werden soll. Da nun dieser Bruch den Quotus ausdrückt, wel-

welcher entspringt wann man den Zehler a durch den Renner b dividirt, so schreibe man anstatt a diese Form a, ○○○○○○○, welche offenbahr nichts anders anzeigt als die Zahl a, weil keine 10tel, keine 100tel und so fort dabey sind. Diese Form theile man nun durch die Zahl b, nach den gewöhnlichen Regeln der Division, wobey man nur in Acht zu nehmen hat, daß das Comma welches die Decimal-Brüche von den ganzen Zahlen absondert, an seinen gehörigen Ort gesetzt werde. Dieses wollen wir nun durch nachfolgende Exempel erläutern.

Es sey erstlich der gegebene Bruch $\frac{1}{2}$ so kommt die Decimal-Division wie folget zu stehen

$$\frac{2)\ 1,\ 0000000}{0,\ 5000000} = \frac{1}{2}.$$

Hieraus sehen wir daß $\frac{1}{2}$ so viel sey als 0,5000000, oder als 0,5 welches auch offenbahr ist, indem dieser Decimal-Bruch $\frac{5}{10}$ anzeigt, welches eben so viel ist als $\frac{1}{2}$.

527.

Es sey ferner der gegebene Bruch $\frac{1}{3}$ so hat man diesen Decimal Bruch

$$\frac{3)\ 1,\ 0000000}{0,\ 3333333}\ \text{etc.} = \frac{1}{3}.$$

Hieraus sieht man daß dieser-Decimal Bruch, deßen Werth $= \frac{1}{3}$ ist, nirgend abgebrochen werden kann, sondern

ins

ins unendliche durch lauter 3 fortläuft. Also machen alle dieseBrüche $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000}$ etc. ohne Ende zusammen genommen just so viel als $\frac{1}{3}$, wie wir schon oben gezeigt haben.

Für $\frac{2}{3}$ findet man folgenden Decimal-Bruch der auch ins unendliche fortläuft

$$\frac{3)\ 2,\ 0000000}{0,\ 6666666} \text{ etc.} = \frac{2}{3}$$

welches auch aus dem vorigen klar ist, weil dieser Bruch zwey mal so groß ist, als der vorige.

528.

Es sey der gegebene Bruch $\frac{1}{4}$ so hat man diese Decimal-Division

$$\frac{4)\ 1,\ 0000000}{0,\ 2500000} = \frac{1}{4}$$

also ist $\frac{1}{4}$ so viel als 0, 2500000, oder als 0, 25, welches daher klar ist, daß $\frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Eben so bekommt man für $\frac{3}{4}$ diesen Decimal-Bruch

$$\frac{4)\ 3,\ 0000000}{0,\ 7500000} = \frac{3}{4}$$

also ist $\frac{3}{4} = 0,\ 75$ das ist $\frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100}$ welcher Bruch durch 25 abgekürzt, giebt $\frac{3}{4}$.

Wollte man $\frac{5}{4}$ in einen Decimal-Bruch verwandeln, so hätte man

$$\frac{4)\ 5,\ 0000000}{1,\ 2500000} = \frac{5}{4}$$

dieses ist aber $1 + \frac{25}{100}$ daß ist $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

529.

529.

Auf solche Art wird $\frac{1}{5} = 0,2$: und $\frac{2}{5} = 0,4$; ferner $\frac{3}{5} = 0,6$; $\frac{4}{5} = 0,8$ und $\frac{5}{5} = 1$, weiter $\frac{6}{5} = 1,2$ etc.

Wann der Nenner 6 ist, so finden wir $\frac{1}{6} = 0,$ 1666666 etc. welches so viel ist als $0,666666 - 0,5$. Nun aber ist $0,666666 = \frac{2}{3}$ und $0,5 = \frac{1}{2}$, folglich ist $0,1666666 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Ferner findet man $\frac{2}{6} = 0,3333333$ etc. $= \frac{1}{3}$; hingegen $\frac{3}{6}$ wird $0,5000000 = \frac{1}{2}$. Weiter wird $\frac{5}{6} = 0,$ $833333 = 0,3333333 + 0,5$ das ist $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

530.

Wann der Nenner 7 ist, so werden die Decimal-Brüche mehr verwirrt: Also für $\frac{1}{7}$ findet man $0,$ 142857 etc. wobey zu mercken, daß immer diese sechs Zahlen 142857 wieder kommen. Um nun zu zeigen daß dieser Decimal-Bruch just $\frac{1}{7}$ ausmache, so verwandele man denselben in eine Geometrische Progression, wovon das erste Glied $= \frac{142857}{1000000}$ der Nenner aber $= \frac{1}{1000000}$; also wird die Summe $= \frac{\frac{142857}{1000000}}{1 - \frac{1}{1000000}}$. Man multiplicire oben und unten mit 1000000 so wird diese Summ $= \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$.

531.

531.

Daß der gefundene Decimal-Bruch just $\frac{1}{7}$ betrage kann noch leichter folgender Gestalt gezeigt werden. Man setze für den Werth desselben den Buchstaben ſ also daß

$$ſ = 0,142857142857142857 \text{ etc.}$$

so wird

$$10ſ = 1,428571428571428571 \text{ etc.}$$
$$100ſ = 14,285714285714285714 \text{ etc.}$$
$$1000ſ = 142,857142857142857142 \text{ etc.}$$
$$10000ſ = 1428,571428571428571428 \text{ etc.}$$
$$100000ſ = 14285,714285714285714285 \text{ etc.}$$
$$1000000ſ = 142857,142857142857142857 \text{ etc.}$$

Subtrahire $ſ = 0,142857142857142857$ etc.

$$999999ſ = 142837,$$

Nun theile man durch 999999, so bekommt man $ſ = \frac{142857}{999999}$ und dieses ist der Werth des obigen Decimal-Bruchs $\frac{1}{7}$.

532.

Eben so verwandelt man $\frac{2}{7}$ in einen Decimal-Bruch 0,28571428 etc. Dieses leitet uns darauf wie man den Werth des vorigen Decimal-Bruchs den

wir

wir ſ gesetzt haben leichter finden kann, weil dieser Bruch just zwey mal so groß ist als der vorige und also = 2 ſ; da wir nun gehabt haben

100 ſ = 14, 285714285 71 etc.

hiervon 2 ſ weggenommen 2 ſ = 0, 285714285 71 etc.

bleiben 98 ſ = 14,

dahero wird ſ = $\frac{14}{98}$ = $\frac{1}{7}$

Ferner wird $\frac{3}{7}$ = 0, 428571428 57 etc. dieses ist also nach dem obigen Satz = 3 ſ; wir haben aber gefunden

10 ſ = 1, 428571428 57 etc.

Subtrahire 3 ſ = 0, 428571438 57 etc.

so wird 7 ſ = 1, folglich ſ = $\frac{1}{7}$.

533.

Wann also der Nenner des gegebenen Bruchs 7 ist, so lauft der Decimal-Bruch ins unendliche, und werden darinnen 6 Zahlen immer wiederholt, wovon der Grund leicht einzusehen ist, weil bey fortgesetzter Division endlich ein mal so viel übrig bleiben muß, als man anfänglich gehabt. Es können aber nicht mehr verschiedene Zahlen übrig bleiben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, also müßen von der sechsten Division an wieder eben die Zahlen herauskommen als vom Anfang. Wann aber der Nenner so beschaffen ist, daß die Division endlich aufgeht, so fält dieses weg.

534.

Es sey der Nenner des Bruchs 8, so werden folgende Decimal Brüche=gefunden:

$\frac{1}{8} = 0,125$: $\frac{2}{8} = 0,250$: $\frac{3}{8} = 0,375$: $\frac{4}{8} = 0,500$: $\frac{5}{8} = 0,625$: $\frac{6}{8} = 0,750$; $\frac{7}{8} = 0,875$ etc.

535.

Ist der Nenner 9 so findet man folgende Decimal=Brüche, $\frac{1}{9} = 0,111$ etc. $\frac{2}{9} = 0,222$ etc. $\frac{3}{9} = 0,333$ etc. Ist aber der Nenner 10 so bekommt man folgende Brüche $\frac{1}{10} = 0,100$; $\frac{2}{10} = 0,2$; $\frac{3}{10} = 0,3$ wie aus der Natur der Sache erhellet. Eben so wird $\frac{1}{100} = 0,01$; $\frac{37}{100} = 0,37$; ferner $\frac{256}{1000} = 0,256$; weiter $\frac{24}{10000} = 0,0024$; welches für sich offenbahr.

536.

Es sey der Nenner des Bruchs 11, so findet man diesen Decimal=Bruch $\frac{1}{11} = 0,0909090$ etc. Wäre nun dieser Bruch gegeben und man wollte seinen Werth finden so setze man denselben $= s$. Es wird also $s = 0,0909090$: und $10s = 00,909090$. Weiter $100\,s = 9,09090$. Hievon s subtrahirt, so wird $99\,s = 9$ und dahero $s = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$. Ferner wird $\frac{2}{11} = 0,181818$; $\frac{3}{11} = 0,272727$; $\frac{6}{11} = 0,545454$

537.

537.

Hier sind nun diejenigen Decimal-Brüche sehr merckwürdig, da einige Zahlen immer wiederholt werden und solcher Gestalt ins unendliche fortgehen. Wie nun von solchen Brüchen der Werth leicht zu finden sey, soll so gleich gezeigt werden.

Es werde erstlich nur eine Zahl wiederholt, welche sey $= a$ so haben wir $\zeta = 0,aaaaaaa$. Diesemnach wird

$$10\,\zeta = a,aaaaaaa.$$

Subtrahire $\zeta = 0,aaaaaaa$

so wird $9\,\zeta = a$, folglich $\zeta = \frac{a}{9}$.

Werden immer zwey Zahlen wiederholt, als ab, so hat man $\zeta = 0,abababa$. Daher wird $100\,\zeta = ab,abababa$. Hievon ζ subtrahirt, bleibt $99\,\zeta = ab$; also $\zeta = \frac{ab}{99}$.

Werden drey Zahlen als abc immer wiederholt, so hat man $\zeta = 0,abcabcabc$; folglich $1000\,\zeta = abc,abcabc$. Hievon das obige subtrahirt, bleibt $999\,\zeta = abc$; also $\zeta = \frac{abc}{999}$ und so weiter.

538.

So oft also ein solcher Decimal-Bruch vorkommt, so ist es leicht seinen Werth anzuzeigen: also wann dieser gegeben wäre $0,296296$; so wird sein

Werth seyn $= \frac{296}{999}$. Dieser Bruch durch 37 abgekürzt wird $= \frac{8}{27}$.

Hieraus muß nun hinwiederum der obige Decimal Bruch entspringen: um dieses leichter zu zeigen weil $27 = 3 \cdot 9$ so theile man 8 erstlich durch 9, und den Quotus ferner durch 3, wie folget.

9) 8, 0000000

3) 0, 8888888

0, 2962962 etc.

Welches der gegebene Decimal-Bruch ist.

539.

Um noch ein Exempel zu geben, so verwandele man diesen Bruch $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}$ in einem Decimal-Bruch welches folgender Gestalt geschieht.

2) 1, 0000000000000

3) 0, 5000000000000

4) 0, 1666666666666

5) 0, 0416666666666

6) 0, 0083333333333

7) 0, 0013888888888

8) 0, 0001984126984

9) 0, 0000248015873

10) 0, 0000027557319

0, 0000002755731 9

Capi-

Capitel 13.

Von den Interessen-Rechnungen.

540.

Die Interessen oder Zinsen von einem Capital pflegen in Procento ausgedrückt zu werden, indem man sagt wie viel von 100 jährlich bezahlt werden. Gemeiniglich wird das Geld zu 5 p. C. ausgelegt, also daß von 100 Rthlr jährlich 5 Rthlr Interessen gezahlt werden. Hieraus ist nun klar und leicht den Zins von einem jeglichen Capital zu berechnen, indem man nach der Regeldetri sagt:

100 geben 5 was giebt das gegebene Capital. Es sey z. E. das Capital 860 Rthl. so findet man den jährlichen Zins

100 : 5 = 860 zu Antwort 43 Rthl.

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 100 \,)\, 4300 \\ \hline 43 \end{array}$$

541.

Bey Berechnung dieses einfachen Interesse wollen wir uns nicht aufhalten, sondern die Interessen auf

Interessen betrachten, da jährlich die Zinsen wieder zum Capital geschlagen und dadurch das Capital vermehret wird, wobey dann gefragt wird: Wie hoch ein gegebenes Capital nach Verfließung einiger Jahre anwachse? Da nun das Capital jährlich größer wird, indem zu 5 Proc. 100 Rthl. nach einem Jahr zu 105 anwachsen so kann man daraus finden, wie groß ein jegliches Capital nach Verfließung eines Jahres werden müße?

Es sey das Capital $=$ a so wird solches nach einem Jahre gefunden, wann man sagt 100 geben 105 was giebt a; Antwort $\frac{105a}{100} = \frac{21a}{20}$, welches auch also geschrieben werden kann $\frac{21}{20}.a$ oder $a + \frac{1}{20}.a$

542.

Wann allso zu dem gegenwärtigen Capital sein 20 ster Theil addirt wird, so bekommt man das Capital für das folgende Jahr. Wann man nun zu diesem wieder seinen 20 sten Theil addirt, so findet man das Capital für das zweyte Jahr; und zu diesem wieder sein 20 ster Theil addirt, giebt das Capital für das dritte Jahr, und so fort. Hieraus ist leicht zu sehen, wie das Capital jährlich anwächst, und kann

die-

diese Rechnung so weit fortgesetzt werden, als man will.

543.

Es sey das Capital anjetzo 1000 Rthl. welches zu 5 P. C. angelegt ist und die Zinsen davon jährlich wieder zum Capital geschlagen werden, weil nun die besagte Rechnung bald auf Brüche führen wird, so wollen wir solche in Decimal-Brüchen ausdrücken, nicht weiter aber als bis auf 1000ste Theile eines Rtl. gehen, weil kleinere Theilchen hier in keine Betrachtung kommen.

Gegenwärtiges Capital 1000 Rthl. wird

nach 1 Jahr	=	=	1050 Rthl.
	=	=	52, 5
nach 2 Jahren	=	=	1102, 5
			55, 125
nach 3 Jahren	=	=	1157, 625
			57, 881
nach 4 Jahren	=	=	1215, 506
			60, 775
nach 5 Jahren	=	=	1276, 281 etc.

544.

Solcher Gestalt kann man auf so viele Jahre fortgehen als man will; wann aber die Anzahl der Jahre sehr groß ist, so wird diese Rechnung sehr weitläuftig und mühsam: dieselbe läßt sich aber folgender gestalt abkürtzen.

Es sey das gegenwärtige Capital = a und da ein Capital von 20 Rthl. nach einem Jahr 21 Rthl. beträgt, so wird das Capital a nach einem Jahr auf $\frac{21}{20}$. a anwachsen. Ferner im folgenden Jahr auf $\frac{21^2}{20^2}$, a = $(\frac{21}{20})^2$. a. Dieses ist nun das Capital nach zweyen Jahren, welches in einem Jahr wieder anwächst auf $(\frac{21}{20})^3$. a, welches das Capital nach drey Jahren seyn wird; nach vier Jahren wird nun dasselbe seyn $(\frac{21}{20})^4$. a; nach fünf Jahren $(\frac{21}{20})^5$. a; nach 100 Jahren $(\frac{21}{20})^{100}$. a, und allgemein nach n Jahren wird dasselbe seyn $(\frac{21}{20})^n$. a; woraus man nach einer jeglichen beliebigen Zahl von Jahren die Größe des Capitals finden kann.

545.

Der hier vorkommende Bruch $\frac{21}{20}$ gründet sich darauf, daß das Interesse zu 5 Pr. gerechnet wird, und $\frac{21}{20}$ so viel ist als $\frac{105}{100}$. Sollte nun das Interesse zu 6 Pr. gerechnet werden, so würde das Capital a nach einem

Jahr

Jahr anwachsen auf $\frac{106}{100}$. a; nach zwey Jahren auf $(\frac{106}{100})^2$. a; und nach n Jahren auf $(\frac{106}{100})^n$. a.

Sollte aber das Interesse nur 4 Pr. betragen, so würde das Capital a nach n Jahren anwachsen auf $(\frac{104}{100})^n$. a.

546.

Wann nun, so wohl das Capital a als die Anzahl der Jahre gegeben ist, so kann man diese Formel leicht auflößen nemlich durch die Logarithmen. Dann man darf nur den Logarithmus von dieser Formel suchen, welche zu 5 Proc. ist $(\frac{21}{20})^n$. a. Da nun dieselbe ein Product ist von $(\frac{21}{20})^n$ und a, so ist ihr Logarithmus $= l(\frac{21}{20})^n + la$. Da weiter $(\frac{21}{20})^n$ eine Potestät ist, so ist $l(\frac{21}{20})^n = n\,l\frac{21}{20}$. Dahero ist der Logarithmus von dem gesuchten Capital $= n.\,l\frac{21}{20} + la$. Es ist aber der Logarithmus des Bruchs $\frac{21}{20} = l21 - l20$.

547.

Es sey nun das Capital $=$ 1000 Rthl. und man fragt wie groß daßelbe nach 100 Jahren zu 5 p. C. seyn werde?

Hier ist also $n = 100$. Der Logarithmus von diesem gesuchten Capital wird nun seyn $= 100\,l\frac{21}{20} + l1000$, welcher folgender Gestalt berechnet wird

$$l\,21 = 1,3222193$$
$$\text{subtr. } l\,20 = 1,3010300$$
$$l\,\tfrac{21}{20} = 0,0211893$$
$$\text{multipl. mit } 100$$
$$100\,l\,\tfrac{21}{20} = 2,1189300$$
$$\text{addirt } l\,1000 = 3,0000000$$
$$5,1189300$$

dieses ist der Logarithmus des gesuchten Capitals und die Zahl desselben wird also aus 6 Figuren bestehen und also heißen 131501 Rthlr.

548.

Ein Capital von 3452 Rthl. zu 6 Procento, wie groß wird dasselbe nach 64 Jahren?

Hier ist also $a = 3452$ und $n = 64$. Also der Logarithmus des gesuchten Capitals $= 64\,l\,\frac{53}{50} + l\,3452$, welches also berechnet wird:

$$l\,53 = 1,7242759$$
$$\text{subtr. } l\,50 = 1,6989700$$
$$l\,\tfrac{53}{50} = 0,0253059$$
$$\text{mult. mit } 64;\ 64\,l\,\tfrac{53}{50} = 1,5195876$$
$$l\,3452 = 3,5380708$$
$$5,0576584$$

Also das gesuchte Capital = 114198 Rthl.

549.

Wann die Anzahl der Jahre sehr groß ist, und weil damit der Logarithmus eines Bruchs multiplicirt werden muß, die Logarithmus in den Tabellen aber nur auf 7 Figuren berechnet worden, so könnte daraus ein mercklicher Fehler entstehen. Dahero muß der Logarithmus des Bruchs auf mehrere Figuren genommen werden wie aus folgendem Exempel zu ersehen: Ein Capital von einem Rthl. zu 5 pr. C. bleibt 500 Jahr lang stehen, da inzwischen die jährliche Zinse immer dazu geschlagen worden: Nun fragt sich wie groß dieses Capital nach 500 Jahren seyn werde?

Hier ist also $a = 1$ und $n = 500$: also der Logarithmus des gesuchten Capitals $= 500 l\frac{21}{20} + l1$, woraus diese Rechnung entspringt

$l21 = 1,3222192947339 19$

subtrahirt $l20 = 1,3010299956639 81$

$l\frac{21}{20} = 0,0211892990699 38$

mult. mit 500 giebt 10,5946495349690 00

dieses ist nun der Logarithmus des gesuchten Capitals, welches dahero selbsten seyn wird $=$ 39323200000 Rthlr.

550.

550.

Wann man aber jährlich zu dem Capital nicht nur die Interesse schlagen, sondern noch jährlich eine neue Summa = b darzu legen wollte, so wird das gegenwärtige Capital alle Jahr anwachsen wie folget. Gegenwärtig hat man a;

nach 1 Jahr $\frac{21}{20}a+b$

nach 2 Jahr $(\frac{21}{20})^2a+\frac{21}{20}b+b$

nach 3 Jahr $(\frac{21}{20})^3a+(\frac{21}{20})^2b+\frac{21}{20}b+b$

nach 4 Jahr $(\frac{21}{20})^4a+(\frac{21}{20})^3b+(\frac{21}{20})^2b+\frac{21}{20}b+b$

nach n Jahr $(\frac{21}{20})^na+(\frac{21}{20})^{n-1}b+(\frac{21}{20})^{n-2}b+\ldots$
$\ldots+\frac{21}{20}b+b$

Dieses Capital besteht aus zwey Theilen, davon der erste $=(\frac{21}{20})^na$, der andere aber aus dieser Reihe rückwerts geschrieben $b+(\frac{21}{20})b+(\frac{21}{20})^2a+(\frac{21}{20})^3b+\ldots(\frac{21}{20})^{n-1}b$ besteht, welches eine Geometrische Progression ist, deren Nenner $=\frac{21}{20}$; Die Summe davon wird nun also gefunden:

Man multiplicirt das letzte Glied $(\frac{21}{20})^{n-1}b$ mit dem Nenner $\frac{21}{20}$, so bekommt man $(\frac{21}{20})^nb$, davon subtrahirt man das erste Glied b, so bleibt $(\frac{21}{20})^nb-b$. Dieses muß durch 1 weniger als der Nenner ist dividirt werden, das ist durch $\frac{1}{20}$; dahero wird die Summe der obigen Progression

sion $= 20(\frac{21}{20})^n b - 20b$; folglich wird das gesuchte Capital seyn:

$(\frac{21}{20})^n a + 20.(\frac{21}{20})^n b - 20b = (\frac{21}{20})^n.(a + 20b) - 20b.$

551.

Um nun dieses auszurechnen, so muß man das erste Glied $(\frac{21}{20})^n a(a + 20b)$ besonders betrachten und berechnen, welches geschieht, wann man den Logarithmus desselben sucht welcher ist $n\,l\frac{21}{20} + l(a + 20b)$. Zu diesem sucht man in den Tabellen die gehörige Zahl, so hat man das erste Glied; davon subtrahirt man 20b, so bekommt man das gesuchte Capital.

552.

Frage: Einer hat ein Capital von 1000 Rthl. zu 5 pr. C. ausstehen, wozu er jährlich außer den Zinsen noch 100 Rthl. hinzulegt, wie groß wird dieses Capital nach 25 Jahren seyn?

Hier ist also $a = 1000$; $b = 100$; $n = 25$; dahero wird die Rechnung stehen wie folget:

$l\frac{21}{20} = 0,0211892\,99$

multiplic. mit 25 giebt

$25\,l\frac{21}{20} = 0,5297324750$

0,

0,5297324750
l(a + 20b) = 3,4771213135
4,0068537885

Also ist der erste Theil 10159,1 Rthl. davon subtrahirt 20b = 2000, so ist das Capital nach 25 Jahren werth 8159,1 Rthl.

553.

Da nun das Capital immer größer wird und nach 25 Jahren auf $8159\frac{1}{10}$ Rthl. angewachsen, so kann man weiter fragen nach wie viel Jahren dasselbe bis auf 1000000 Rthl. anwachsen werde?

Es sey n diese Anzahl von Jahren, und weil a = 1000, b = 100 so wird nach n Jahren das Capital seyn: $(\frac{21}{20})^n(3000) - 2000$ dieses muß nun 1000000 Rthl. seyn, woraus diese Gleichung entspringt:

$$3000(\tfrac{21}{20})^n - 2000 = 1000000.$$

Man addire beyderseyts 2000, so bekommt man

$$3000\,(\tfrac{21}{20})^n = 1002000.$$

Man dividire beyderseits durch 3000 so hat man $(\frac{21}{20})^n = 334$. Hiervon nehme man die Logarithmus, so hat man $n.l\frac{21}{20} = l334$. Hier dividirt man durch $l\frac{21}{20}$, so kommt $n = \frac{l334}{l\frac{21}{20}}$. Nun aber ist $l334 =$

2,5237465

$2{,}5237465$ und $l^{\frac{21}{20}} = 0{,}0211893$; dahero wird $n = \frac{2{,}5237465}{0{,}0211893}$. Man multiplicire oben und unten mit 10000000, so kommt $n = \frac{25237465}{211893}$, das ist 119 Jahr 1 Monath 7 Tage, und nach so langer Zeit wird das Capital anwachsen auf 1000000 Rthl.

554.

Wann aber anstatt, daß alle Jahr etwas zum Capital gelegt wird, etwas davon weggenommen wird, so man auf seinen Unterhalt verwendet, und diese Summe $= b$ gesetzt wird, so wird das zu 5 p. C. angelegte Capital a folgender Gestalt fortgehen:

Gegenwärtig ist es a:

nach 1 Jahr $\frac{21}{20}a - b$

nach 2 Jahren $(\frac{21}{20})^2 a - \frac{21}{20}b - b$

nach 3 Jahren $(\frac{21}{20})^3 a - (\frac{21}{20})^2 b - \frac{21}{20}b - b$

nach n Jahren $(\frac{21}{20})^n a - (\frac{21}{20})^{n-1} b - (\frac{21}{20})^{n-2} b \ldots$

$\ldots - (\frac{21}{20})b - b.$

555.

Dasselbe wird uns also in zwey Stücken vorgelegt, das erste ist $(\frac{21}{20})^n a$; davon wird subtrahirt diese Geometrische Progression rückwärts geschrieben

$b + \frac{21}{20}$

$b+\frac{21}{20}b+\left(\frac{21}{20}\right)^2 b+\ldots\left(\frac{21}{20}\right)^{n-1}$. Hiervon ist oben die Summe gefunden worden $= 20\left(\frac{21}{20}\right)^n b - 20b$, welche von dem ersten $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$ subtrahirt, das nach n Jahren gesuchte Capital giebt $\left(\frac{21}{20}\right)^n (a-20b)+20b$

556.

Diese Formel hätte so gleich aus der vorigen geschloßen werden können. Dann da vorher jährlich b addirt wurde, so wird nun jährlich b subtrahirt. Also darf man in der vorhergehenden Formel anstatt + b nur −b schreiben. Hier ist nun insonderheit zu mercken, daß wann 20b grösser ist, als a so wird das erste Glied negativ und also das Capital immer kleiner; welches vor sich offenbahr ist, dann wann vom Capital jährlich mehr weggenommen wird, als der Zins beträgt, so muß dasselbe alle Jahr kleiner werden und endlich gar verschwinden; welches wir mit einem Exempel erläutern wollen.

557.

Einer hat ein Capital von 100000 Rthl. zu 5 pr. C. ausstehen; braucht alle Jahr zu seinem Unterhalt 6000 Rthl. welches mehr ist als das Interesse von 100000 Rthl. so nur 5000 Rthl. beträgt, daher das Capital immer kleiner wird. Nun ist die Frage

nach

nach wie viel Jahren dasselbe gäntzlich verschwinden werde?

Vor diese Anzahl Jahre setze man n, und da $a = 100000$ Rthl. und $b = 6000$, so wird nach n Jahren das Capital seyn $= -20000\left(\frac{21}{20}\right)^n + 120000$ oder $120000 - 20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$. Also verschwindet das Capital wann $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$ auf 120000 anwächst, oder wann $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n = 120000$. Man dividire durch 20000, so kommt $\left(\frac{21}{20}\right)^n = 6$. Man nehme die Logarithmus, so kommt $n\,l\frac{21}{20} = l\,6$. Man dividire durch $l\frac{21}{20}$, so findet man $n = \frac{l6}{l\frac{21}{20}} = \frac{0,7781513}{0,0211893}$, oder $n = \frac{7781513}{211893}$ folglich wird $n = 36$ Jahr 8 Monath 22 Tage: und nach so vieler Zeit wird es verschwinden.

558.

Hier ist noch nöthig zu zeigen, wie nach diesem Grund die Interessen auch vor eine kleinere Zeit als gantze Jahre berechnet werden können. Hierzu dient nun auch die oben gefundene Formel, daß ein Capital zu 5 pr. C. nach n Jahren auf $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$ anwächst, ist nun die Zeit kleiner als ein Jahr, so wird der Exponent n ein Bruch und die Rechnuug kann wie vorher durch Logarithmus gemacht werden. Sollte das Capital nach einem Tage gesucht werden, so muß man setzen

$n = \frac{1}{365}$: will man es nach zwey Tagen wißen, so wird $n = \frac{2}{365}$ etc.

559.

Es sey das Capital $a = 100000$ Rthl. zu 5 p. C. wie groß wird solches nach 8 Tagen seyn?

Hier ist $a = 100000$ und $n = \frac{8}{365}$; folglich wird das Capital seyn $(\frac{21}{20})^{\frac{8}{365}}$ 100000. Hiervon ist der Logarithmus $= l(\frac{21}{20})^{\frac{8}{365}} + l\,100000 = \frac{8}{365} l\frac{21}{20} + l\,100000$. Nun aber ist $l\frac{21}{20} = 0,0211892$.

dieser mit $\frac{8}{365}$ multiplicirt giebt 0, 0004644
hierzu ad. l 100000 welcher ist 5, 0000000

5, 0004644

so erhält man den Logarithmus von dem Capital $= 5,0004644$. Folglich ist das Capital selbst 100107 Rthl. so daß in den ersten 8 Tagen das Interesse schon 107 Rthl. austrägt.

560.

Hierher gehören noch andere Fragen, welche darauf gehen, wann eine Summa Geld erst nach einigen Jahren verfällt wie viel dieselbe anjetzo werth sey. Hier ist zu betrachten, daß da 20 Rthl. über ein Jahr 21 Rthl. austragen, so sind hinwiederum 21 Rthl. die

nach

nach einem Jahr zahlbar sind, anjetzo nur 20 Rthl. werth. Wann also das nach einem Jahr verfallene Capital a gesetzt wird, so ist desselben Werth $\frac{20}{21}$ a. Um also zu finden wie viel das Capital a, so zu einer gewissen Zeit verfällt ein Jahr früher werth ist, so muß man daßelbe multiplicirten mit $\frac{20}{21}$; zwey Jahr früher wird desselben Werth seyn $(\frac{20}{21})^2$ a; drey Jahr früher ist dasselbe $(\frac{20}{21})^3$ a und überhaupt n Jahr früher ist der Werth desselben $(\frac{20}{21})^n$ a.

561.

Einer genießt auf 5 Jahr lang eine jährliche Rente von 100 Rthl. dieselbe wollte er nun jetzt für baares Geld zu 5 pr. C. verkaufen, wie viel wird er dafür bekommen?

für die 100 Rthl. welche verfallen

nach 1 Jahr	bekommt er	95,	239
nach 2 Jahren	" "	90,	704
nach 3 Jahren	" "	86,	385
nach 4 Jahren	" "	82,	272
nach 5 Jahren	" "	78,	355
Summa aller 5 Jahren	" "	432,	955

Also kan er vor diese Rente nicht mehr fordern als 432, 955 Rthl. oder 432 Rthl. 22 gr. 11 Pf.

562.

Sollte aber eine Rente viel mehr Jahre laing dauren, so würde die Rechnung auf diese Art sehr mühsam werden, welche aber folgender Gestalt erleichtert werden kann:

Es sey die jährliche Rente = a, welche jetzo schon anfängt und n Jahre lang dauret, so wird dieselbe anjetzo werth seyn:

$$a + \frac{20}{21}a + \left(\frac{20}{21}\right)^2 a + \left(\frac{20}{21}\right)^3 a + \left(\frac{20}{21}\right)^4 a + \ldots \left(\frac{20}{21}\right)^n a.$$

Dieses ist nun eine Geometrische Progression deren Summe gefunden werden muß. Man multiplicirt also das letzte Glied mit dem Nenner, so hat man $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a$; Davon das erste Glied subtrahirt, bleibt $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a - a$; dieses muß mit dem Nenner weniger eins, das ist, mit $-\frac{1}{21}$ dividirt, oder welches gleich viel, mit -21 multiplicirt werden: dahero wird die gesuchte Summe seyn $= -21\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a + 21a$, das ist $21a - 21\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a$, wovon das letztere Glied, so subtrahirt werden soll, leicht durch Logarithmus berechnet werden kann.

Ende des ersten Theils und des dritten Abschnitts von den Verhältnißen und Proportionen.

STAATSBIBLIOTHEK BAMBERG

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Euler, Leonhard, / Lagrange, Joseph Louis <<de>>, / Kausler, Christoph Friedrich,

Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur Algebra

Bd.: 1. (1770). - 356 S. : Ill.

1770

Bamberg, Staatsbibliothek -- Lyc.o.62(1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11731745-1
VD18 80241263-001